

Vorbemerkungen

Zum Verständnis dieser Arbeit werden die Grundkenntnisse aus der Algebra, aus der Infinitesimalrechnung und aus der Kombinatorik vorausgesetzt.

Selbstverständliche Nebenbedingungen für allgemeine Größen wurden der Übersicht wegen oft weggelassen. Folgen werden zur Vereinfachung durch ein allgemeines Glied dargestellt.

Zur Schreibweise:

$a \parallel b$ bedeutet : „a wird ersetzt durch b“

Zusatzdefinition zu $\sum$ und $\prod$:

$$\sum_a^{a-1} := 0 \quad (a \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

$$\prod_a^{a-1} := 1 \quad (a \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

(vgl. „van der Waerden Algebra I“)

Literaturnachweis

van der Waerden : Algebra I Springer-Verlag 1960

Zwenger-Klug : Algebra J. Lindauer Verlag München 1964

Die arithmetische Zahlenfolge

A, Differenzenbildung und Aufsummierung bei einer allgemeinen Folge

I. Differenzfolgen und Differenzen bei einer allgemeinen Folge

1. Rekursivdefinition der λ -ten Differenzfolge einer allgemeinen Folge

Definition:

Ist y_k ($k=1,2,3,\dots$) irgendeine Folge, so ist die λ -te ($\lambda \in \{0,1,2,\dots\}$) Differenzfolge $\Delta^\lambda y_k$ erklärt durch:

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_k &= y_k \\ \Delta^1 y_k &= \Delta y_k = y_{k+1} - y_k \\ \Delta^m y_k &= \Delta(\Delta^m y_k) \quad \text{wobei } m \in \{1,2,\dots,\lambda-1\} \end{aligned}$$

2. Independent Darstellung der λ -ten Differenzfolge einer allgemeinen Folge

Um das Bildungsgesetz der independenten Formel zu ermitteln, wird die Rekursivdefinition mehrmals nacheinander auf sich angewendet:

$$\Delta^0 y_k = y_k$$

$$\Delta^1 y_k = y_{k+1} - y_k$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= \Delta(y_{k+1} - y_k) = y_{k+2} - y_{k+1} - y_{k+1} + y_k \\ &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_k &= \Delta(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = y_{k+3} - 2y_{k+2} + y_{k+1} - y_{k+2} + 2y_{k+1} - y_k \\ &= y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k \end{aligned}$$

Es liegt folgende Vermutung nahe:

$$\Delta^\lambda y_k = \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p} \quad \text{wobei } k=1,2,3,\dots \text{ und } \lambda \in \{0,1,2,\dots\} \quad (1)$$

Beweis durch vollständige Induktion nach λ :

1. Schritt: $\lambda = 0$ erfüllt den Satz

$\lambda = 1$ erfüllt den Satz

Diese Behauptungen sind bereits als richtig erwiesen

2. Schritt: Schluß von λ auf $\lambda+1$

$$\text{Vor.: } \Delta^\lambda y_k = \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p}$$

$$\text{Beh.: } \Delta^{\lambda+1} y_k = \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda+1}{p} y_{k+p}$$

Bev.:

$$\begin{aligned} \text{L.S. } \Delta^{\lambda+1} y_k &= \Delta \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p} \\ &= \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p+1} - \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p} \\ &\quad \downarrow p \parallel p-1 \\ &= \sum_{p=1}^{\lambda+1} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda}{p-1} y_{k+p} - \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p} \\ &= \sum_{p=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda}{p-1} y_{k+p} + \sum_{p=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda}{p} y_{k+p} + (-1)^{\lambda+1} \binom{\lambda}{\lambda} y_{k+\lambda+1} + (-1)^{\lambda+1} \binom{\lambda}{0} y_k \\ &= \sum_{p=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda+1}{p} y_{k+p} + (-1)^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\lambda+1} y_{k+\lambda+1} + (-1)^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{0} y_k \\ &= \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda+1}{p} y_{k+p} \end{aligned}$$

$$\text{R.S. } \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^{\lambda+1-p} \binom{\lambda+1}{p} y_{k+p}$$

q.e.d.

Formel (1) ist mit der Rekursivdefinition der λ -ten Differenzfolge äquivalent, d.h. Differenzfolgen können aus (1) oder aus der Rekursivdefinition errechnet werden je nachdem, was zweckmäßiger erscheint.

3. Definition der λ -ten Differenz eines Folgengliedes einer allgemeinen Folge

Definition:

Ist $y_k (k=1,2,3,\dots)$ irgendeine Folge und i ein spezieller K -Wert, so heißt

das Folgenglied $\Delta^\lambda y_i$ der Folge $\Delta^\lambda y_k (\lambda \in \{0,1,2,\dots\})$

die λ -te Differenz des Folgengliedes y_i der Folge y_k .

4. Aufstellung der λ -ten Differenzfolge aus der $(\lambda+1)$ -ten bei einer allgemeinen Folge

Aus 1. ergibt sich:

$$\Delta^{\lambda+1} y_k = \Delta^{\lambda} y_{k+1} - \Delta^{\lambda} y_k \quad \text{für } k=1,2,3,\dots \text{ und } \lambda \in \{0,1,2,\dots\}$$

$$\Delta^{\lambda} y_{k+1} = \Delta^{\lambda} y_k + \Delta^{\lambda+1} y_k$$

Wird nun ein m und ein v natürlich gewählt, so gilt auch:

$$a) \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda} y_{k+1} = \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda} y_k + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda+1} y_k \quad \text{wenn } 1 \leq m \leq k \leq v-1, \text{ also } v > m$$

$$\downarrow$$

$$k \parallel k-1$$

$$\sum_{k=m}^v \Delta^{\lambda} y_k = \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda} y_k + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda+1} y_k$$

$$\sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda} y_k + \Delta^{\lambda} y_v = \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda} y_k + \Delta^{\lambda} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda+1} y_k$$

$$b) \Delta^{\lambda} y_v = \Delta^{\lambda} y_m \quad \text{wenn } v = m$$

$$c) \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda} y_{k+1} = \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda} y_k + \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k \quad \text{wenn } 1 \leq v \leq k \leq m-1, \text{ also } v < m$$

$$\downarrow$$

$$k \parallel k-1$$

$$\sum_{k=v}^m \Delta^{\lambda} y_k = \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda} y_k + \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k$$

$$\sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda} y_k + \Delta^{\lambda} y_m = \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda} y_k + \Delta^{\lambda} y_v + \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k$$

Man erhält also folgende Formel:

$$\Delta^{\lambda} y_v = \begin{cases} 1. \Delta^{\lambda} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{\lambda+1} y_k & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{\lambda} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{\lambda} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k & \text{für } v < m \end{cases} \quad (2)$$

oder anders geschrieben:

$$\Delta^{\lambda} y_v = \Delta^{\lambda} y_m + \sum_{k=1}^{v-1} \Delta^{\lambda+1} y_k - \sum_{k=1}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k \quad \text{für } v \text{ und } m \text{ beliebig natürlich} \quad (3^*)$$

II. Teilsammenfolgen und Reihen bei einer allgemeinen Folge

1. Definition der Teilsammenfolge einer allgemeinen Folge

Definition:

Ist $y_k (k=1,2,3,\dots)$ irgendeine Folge, so ist die Teilsammenfolge σy_k erklärt durch:

$$\sigma y_k = \sum_{k=1}^l y_k \quad \text{wobei } l=1,2,3,\dots$$

2. Definition der Reihe einer allgemeinen Folge

Definition:

Ist $y_k (k=1,2,3,\dots)$ irgendeine Folge und m ein positiver k -Wert, so heißt das Folgeglied

$$\sigma_m y_k := \sum_{k=1}^m y_k \quad \text{der Folge } \sigma y_k$$

die Reihe mit m Gliedern der Folge y_k

3. Aufstellung einer allgemeinen Folge aus ihrer Teilsammenfolge

Wird von einer $(m-1)$ -gliedrigen ($m \in \{2,3,4,\dots\}$) Reihe der Folge $y_k (k=1,2,3,\dots)$ die erste

Differenz gebildet, so ergibt sich:

$$\Delta(\sigma_{m-1} y_k) = \sigma_m y_k - \sigma_{m-1} y_k = \sum_{k=1}^m y_k - \sum_{k=1}^{m-1} y_k = y_m$$

$$\Delta(\sigma_{m-1} y_k) = y_m \quad \text{wobei } m \in \{2,3,4,\dots\} \text{ und } k=1,2,3,\dots \quad (3)$$

Es sei an der Stelle darauf hingewiesen, daß im allgemeinen Δ und σ , wenn sie hintereinander stehen, keine vertauschbaren Symbole sind:

Aus (2) 1. folgt für $\lambda=0$, $\nu=m$ und $m(\text{aus (2)})=1$:

$$\Delta^0 y_m = \Delta^0 y_1 + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta y_k$$

$$\sigma_{m-1}(\Delta y_k) = y_m - y_1$$

In Verbindung mit (3) wird deutlich:

$$\sigma_{m-1}(\Delta y_k) = \Delta(\sigma_{m-1} y_k) - y_1$$

also:

$$\sigma_{m-1}(\Delta y_k) = \Delta(\sigma_{m-1} y_k) \quad \text{falls nicht } y_1 = 0$$

A₂ Die Kombinationsfunktionen

I. Die elementarsymmetrischen Funktionen

1. Definition der elementarsymmetrischen Funktionen

Definition:

Sind x_i ($i \leq v$; und v natürlich) v reelle Variable, so versteht man unter den v elementarsymmetrischen Funktionen σ_{hv} (h natürlich $\leq v$) der x_i die Summen derjenigen $\binom{v}{h}$ Produkte mit h Faktoren x_i , die die $\binom{v}{h}$ Faktorkombinationen ohne Wiederholung von den v Faktoren x_i zur h -ten Klasse darstellen.

Außerdem sei für $h=0$ $\sigma_{0v} = \sigma_0 = 1$ festgelegt.

Nach dieser Definition berechnen sich die elementarsymmetrischen Funktionen aus folgenden Beziehungen:

$$\sigma_{0v} = \sigma_0 = 1$$

$$\sigma_{1v} = x_1 + x_2 + \dots + x_v$$

$$\sigma_{2v} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_3 + \dots + x_{v-1} x_v$$

$$\sigma_{3v} = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{v-2} x_{v-1} x_v$$

$\vdots$

$$\sigma_{vv} = x_1 x_2 \dots x_v$$

oder:

$$\sigma_{0v} = \sigma_0 = 1$$

$$\sigma_{hv} = \sum_{i_1=1}^{v-h+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{v-h+2} \sum_{i_3=i_2+1}^{v-h+3} \dots \sum_{i_h=i_{h-1}+1}^v x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_h} \quad \text{für } h \text{ natürlich}$$

2. Definition des Ranges einer elementarsymmetrischen Funktion σ_{hv}

Definition:

Unter dem Rang einer elementarsymmetrischen Funktion σ_{hv} ($h \in \{0, 1, 2, \dots, v\}$) wird der Ausdruck $2h$ verstanden

3. Die erste Differenzfolge von σ_{hv} bei konstantem Rang

$$\Delta \sigma_{hv} = \sigma_{h(v+1)} - \sigma_{hv} \quad \text{für } 2h \text{ konstant}$$

Zur Klarheit wird im folgenden $\Delta \sigma_{hv}$ geschrieben, wenn die 1. Differenzfolge von σ_{hv} bei konstantem Rang gemeint ist.

Da sich $\sigma_{h(v+1)}$ von σ_{hv} genau um die Summe derjenigen Faktorkombinationen ohne Wiederholung unterscheidet, die den Faktor x_{v+1} enthalten, und da in $\sigma_{h(v+1)}$ der Faktor x_{v+1} nacheinander mit allen Faktorkombinationen ohne Wiederholung der v übrigen Faktoren zur $(h-1)$ -ten Klasse multipliziert sein muß, gilt:

$$\Delta \sigma_{hv} = x_{v+1} \sigma_{(h-1)v} \quad \text{für } h \text{ natürlich } > 1$$

4. Rekursivdarstellung und Berechnungsschema für die elementarsymmetrischen Funktionen

Wegen (2) kennt man eine Folge, wenn man ihr erstes Glied und ihre Differenzfolge kennt. Deshalb können die elementarsymmetrischen Funktionen auch so festgelegt werden:

$$\begin{cases} \sigma_{0v} = \sigma_0 := 1 \\ \sigma_{1v} = \sum_{i=1}^v x_i \\ \sigma_{hh} = \prod_{i=1}^h x_i \\ \Delta \sigma_{hv} = x_{v+1} \sigma_{(h-1)v} \quad (h > 1) \end{cases}$$

Aus (2) ergibt sich für $\lambda=0$, $v=v$ und $m=h$:

$$y_v = y_h + \sum_{k=h}^{v-1} \Delta y_k$$

Bestimmt man darin $y_i = \sigma_{hi}$, so folgt:

$$\begin{aligned} \sigma_{hv} &= \sigma_{hh} + \sum_{k=h}^{v-1} \Delta \sigma_{hk} \quad | \quad k \parallel k-1 \quad (h > 1) \\ &= \sigma_{hh} + \sum_{k=h-1}^v x_k \sigma_{(h-1)(k-1)} \\ &= \sum_{k=h}^v x_k \sigma_{(h-1)(k-1)} \end{aligned}$$

$$\sigma_{hv} = \sum_{k=h}^v x_k \sigma_{(h-1)(k-1)} \quad (h > 1)$$

Daraus ist in Verbindung mit σ_0 und σ_{1V} ein einfaches Schema zur Berechnung von σ_{kV} ersichtlich:

$\sigma_{0V} = \sigma_0$	1	1	1	1	1	1	---
$\sigma_{1V} = \sum_{i=1}^1 x_i$	σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}	σ_{16}	---
$x_k \sigma_{1(k-1)V}$ σ_{2V}	$x_2 \sigma_{11}$ $\downarrow$ σ_{22}	$x_3 \sigma_{12}$ $\downarrow$ σ_{23}	$x_4 \sigma_{13}$ $\downarrow$ σ_{24}	$x_5 \sigma_{14}$ $\downarrow$ σ_{25}	$x_6 \sigma_{15}$ $\downarrow$ σ_{26}	---	---
$x_k \sigma_{2(k-1)V}$ σ_{3V}	$x_3 \sigma_{22}$ $\downarrow$ σ_{33}	$x_4 \sigma_{23}$ $\downarrow$ σ_{34}	$x_5 \sigma_{24}$ $\downarrow$ σ_{35}	$x_6 \sigma_{25}$ $\downarrow$ σ_{36}	---	---	---
$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$

Es wird in Richtung der punktierten Pfeile angeschrieben und in Richtung der ausgezogenen Pfeile addiert.

5. Die Bedeutung der elementarsymmetrischen Funktionen

Die elementarsymmetrischen Funktionen ermöglichen es, den Ausdruck $\prod_{i=1}^n (z - x_i)$, wobei z eine reelle Variable darstellt, nach Potenzen von z zu ordnen:

$$\prod_{i=1}^n (z - x_i) = \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \sigma_{(n-i)n} z^i$$

(nach „van der Waerden Algebra I“)

Die Richtigkeit der Formel lässt sich durch Ausmultiplizieren der linken Seite leicht erkennen.

Diese Formel zeigt, daß die elementarsymmetrischen Funktionen ungeändert bleiben, wenn man die x_i irgendwie untereinander vertauscht.

I. Die vollkombinierten Funktionen

1. Definition der vollkombinierten Funktionen

Definition:

Sind x_i ($i \leq v$; i und v natürlich) v reelle Variable, so versteht man unter den v vollkombinierten Funktionen T_{hv} (h natürlich) der x_i die Summen derjenigen $\binom{v+h-1}{h}$ Produkte mit h Faktoren x_i , die die $\binom{v+h-1}{h}$ Faktorkombinationen mit Wiederholung von den v Faktoren x_i zur h -ten Klasse darstellen.

Außerdem sei für $h=0$ $T_{0v} := T_0 := 1$ festgelegt.

2. Definition des Ranges einer vollkombinierten Funktion T_{hv}

Definition:

Unter dem Rang einer vollkombinierten Funktion T_{hv} ($h \in \{0, 1, 2, \dots\}$) wird der Ausdruck $2h$ verstanden.

3. Die erste Differenzfolge von T_{hv} bei konstantem Rang

$$\Delta T_{hv} = T_{h(v+1)} - T_{hv} \quad \text{für } 2h \text{ konstant}$$

Zur Klarheit wird im folgenden ΔT_{hv} geschrieben, wenn die 1. Differenzfolge von T_{hv} bei konstantem Rang gemeint ist.

Da sich $T_{h(v+1)}$ von T_{hv} genau um die Summe derjenigen Faktorkombinationen mit Wiederholung unterscheidet, die einen oder mehrere Faktoren x_{v+1} enthalten, und da in $T_{h(v+1)}$ ein Faktor x_{v+1} nacheinander mit allen Faktorkombinationen mit Wiederholung der $v+1$ Faktoren zur $(h-1)$ -ten Klasse multipliziert sein muß, gilt:

$$\Delta T_{hv} = x_{v+1} T_{(h-1)(v+1)} \quad \text{für } h \text{ natürlich } > 1$$

4. Rekursivdarstellung und Berechnungsschema für die vollkombinierten Funktionen

Wegen (2) können die vollkombinierten Funktionen auch so festgelegt werden:

$$\begin{aligned}
 \tau_{0V} &:= \tau_0 := 1 \\
 \tau_{1V} &:= \sum_{i=1}^V \alpha_i \\
 \tau_{h1} &:= \alpha_1^h \\
 \Delta \tau_{hv} &:= \alpha_{v+1} \tau_{(h-1)(v+1)} \quad (h > 0)
 \end{aligned}$$

Aus (2) ergibt sich für $\lambda=0$, $v=V$ und $m=1$

$$y_V = y_1 + \sum_{k=1}^{V-1} \Delta y_k$$

Bestimmt man darin $y_i = \tau_{hi}$, so folgt:

$$\begin{aligned}
 \tau_{hV} &= \tau_{h1} + \sum_{k=1}^{V-1} \Delta \tau_{hk} \quad | \quad k \parallel k-1 \quad (h > 1) \\
 &= \tau_{h1} + \sum_{k=2}^V \alpha_k \tau_{(h-1)k}
 \end{aligned}$$

$$\tau_{hV} = \sum_{k=1}^V \alpha_k \tau_{(h-1)k} \quad (h > 1)$$

Daraus ist in Verbindung mit τ_0 und τ_{1V} ein einfaches Schema zur Berechnung von τ_{hV} ersichtlich:

$\tau_{0V} = \tau_0$	1	1	1	1	1	---
$\tau_{1V} = \sum_{i=1}^V \alpha_i$	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}	---
$\alpha_k \tau_{1k}$ τ_{2V}	$\alpha_1 \tau_{11}$ $\vdots$ τ_{21}	$\alpha_2 \tau_{12}$ $\vdots$ τ_{22}	$\alpha_3 \tau_{13}$ $\vdots$ τ_{23}	$\alpha_4 \tau_{14}$ $\vdots$ τ_{24}	$\alpha_5 \tau_{15}$ $\vdots$ τ_{25}	---
$\alpha_k \tau_{2k}$ τ_{3V}	$\alpha_1 \tau_{21}$ $\vdots$ τ_{31}	$\alpha_2 \tau_{22}$ $\vdots$ τ_{32}	$\alpha_3 \tau_{23}$ $\vdots$ τ_{33}	$\alpha_4 \tau_{24}$ $\vdots$ τ_{34}	$\alpha_5 \tau_{25}$ $\vdots$ τ_{35}	---
$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv$	$\equiv \equiv \equiv$

Es wird in Richtung der punktierten Pfeile angeschrieben und in Richtung der ausgezogenen Pfeile addiert.

B. Definition der arithmetischen Folge n-ten Grades

Definition:

Eine Folge $y_k (k=1,2,3,\dots)$ heißt eine arithmetische Folge n-ten Grades ($n \in \{0,1,2,\dots\}$), wenn

$$y_k = \sum_{i=0}^n a_i k^i \quad \text{wobei } a_i (i=0,1,\dots,n) \text{ konstante Größen sind und } a_n \neq 0.$$

C. Die λ -te Differenzfolge der arithmetischen Folge n-ten Grades

I. Hilfssatz

Dieser Hilfssatz soll eine vereinfachte Darstellung und eine Deutung der Folge $\Delta_{\lambda}^+ y_v = \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{v!}{u!(v-u)!}$ ($v=1,2,3,\dots; \lambda \in \{0,1,2,\dots\}$) ermöglichen. Das Symbol Δ_{λ}^+ soll dabei eine vereinfachte Schreibweise für die Folge darstellen, die in der ganzen Arbeit beibehalten wird.

Der Hilfssatz bringt folgende Ergebnisse:

$$\Delta_{\lambda}^+ y_v = \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{v!}{u!(v-u)!} \left\{ \begin{array}{ll} = \frac{(-1)^{v\lambda}}{v!} & \text{für } \lambda = 0 \\ \left[\begin{array}{ll} = 1 & \text{wenn } v=1 \\ = 0 & \text{wenn } v>1 \end{array} \right] & \text{für } 1 \leq \lambda < v \\ = \tau_{(\lambda-v)v} \text{ wobei } \tau_i = \begin{cases} = 1 & \text{für } \tau = v \\ = \binom{v-1}{2} & \text{für } \tau = v+1 \\ = \binom{v-2}{3} \frac{3v-1}{4} & \text{für } \tau = v+2 \\ = \binom{v-3}{4} \cdot \binom{v-1}{2} & \text{für } \tau = v+3 \\ \vdots & \vdots \end{cases} & \text{für } \tau \geq v \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\sum_{\tau=v}^i (-1)^{\tau} \Delta_{\tau}^+ y_v = \Delta_{i-v}^+ y_v \quad \text{wobei } i \in \{v, v+1, v+2, \dots\}$$

Herleitungen und Beweise

1. Definition des Ranges von Δ_{λ}^+

Definition:

Unter dem Rang $2h$ von Δ_{λ}^+ ($v=1,2,3,\dots; \lambda$ beliebig reell) wird der Ausdruck $2(v-v)$ verstanden.

2. Die erste Differenzfolge von h_v^+ bei konstantem Rang

Unter Verwendung des Ranges z_k schreibt sich h_v^+ so:

$$h_v^+ = h_v^{v+h}$$

Nun erhält man für die 1. Differenzfolge bei konstantem Rang:

$$\Delta h_v^{v+h} = h_{v+1}^{v+h+1} - h_v^{v+h} \quad \text{für } z_k \text{ konstant}$$

das heißt auf h_v^+ übertragen:

$$\Delta h_v^+ = h_{v+1}^{r+1} - h_v^+ \quad \text{für } z_k \text{ konstant}$$

Zur Klarheit wird im folgenden Δh_v^+ geschrieben, wenn die 1. Differenzfolge von h_v^+ bei konstantem Rang gemeint ist.

Die Berechnung der 1. Differenzfolge von h_v^+ bei konstantem Rang ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta h_v^+ &= \sum_{u=1}^{v+1} (-1)^{v-u+1} \frac{u^{r+1}}{u!(v-u+1)!} - \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{u^r}{u!(v-u)!} \\ &= \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u+1} \frac{u^{r+1}}{u!(v-u+1)!} + \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u+1} \frac{u^r}{u!(v-u)!} + \frac{(v+1)^{r+1}}{(v+1)!} \\ &= \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u+1} \frac{u^{r+1} + (v+1)u^r - u^{r+1}}{u!(v-u+1)!} + (v+1) \frac{(v+1)^r}{(v+1)!} \\ &= (v+1) \sum_{u=1}^{v+1} (-1)^{v-u+1} \frac{u^r}{u!(v-u+1)!} \\ &= (v+1) h_{v+1}^+ \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta h_v^+ = (v+1) h_{v+1}^+}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Beziehung wegen ihrer allgemeinen Herleitung auch für r beliebig teill gilt. Zusätzlich ist noch $v=0$ möglich (Beweis durch Einsetzen).

3. Berechnung von h_v^0

$$\begin{aligned} h_v^0 &= \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{1}{u!(v-u)!} \\ &= \frac{1}{v!} \sum_{u=1}^v \binom{v}{u} 1^u (-1)^{v-u} \\ &= \frac{1}{v!} \left[\sum_{u=0}^v \binom{v}{u} 1^u (-1)^{v-u} - (-1)^v \right] \\ &= \frac{1}{v!} \left[(1-1)^v - (-1)^v \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^m}{v!}$$

4. Berechnung von $h_{1,1}^+$

$$h_{1,1}^+ = \sum_{u=1}^1 (-1)^{1-u} \frac{u^+}{u! (1-u)!}$$

$$= (-1)^0 \frac{1^+}{1! 0!}$$

$$= 1$$

$$\boxed{h_{1,1}^+ = 1}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß auch diese Beziehung wegen ihrer allgemeinen Herleitung für r beliebig reell gilt.

5. Beweis des Ergebnisses für $h_{v,1}^+$ wenn $1 \leq r < v$

$h_{1,1}^+ = 1$ für $1 \leq r < v$ ergibt sich sofort aus 4.

Der Beweis, daß $h_{v,1}^+ = 0$ für $v \geq 2$ und $1 \leq r < v$, wird durch vollständige Induktion nach v erbracht:

1. Schritt: $v=2$ erfüllt den Satz

$$1 \leq r < 2 \Leftrightarrow r=1$$

$$\text{L.S. } h_{2,1}^+ = h_{2,2}^+ = (-1)^1 \frac{1}{1! 1!} + (-1)^0 \frac{2}{2! 0!} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{R.S. } 0$$

2. Schritt: Schluß von v auf $v+1$

$$\text{Vor.: } h_{v,1}^+ = 0 \text{ für } 1 \leq s \leq v-1 \text{ und } v \geq 2$$

$$\text{Beh.: } h_{v+1,1}^+ = 0 \text{ für } 1 \leq r \leq v \text{ und } v \geq 2$$

Bew.:

L.S. Aus 2. folgt:

$$\Delta_{s=1} h_{v-1,1}^{s-1} = v h_{v,1}^{s-1} \text{ für } v \geq 2 \mid \cdot v^{r-s}$$

$$v^{r-s} \Delta_{s=1} h_{v-1,1}^{s-1} = v^{r-s+1} h_{v,1}^{s-1}$$

Wird nun ein r natürlich gewählt, so gilt:

$$\sum_{s=1}^r v^{r-s} \Delta_{s=1} h_{v-1,1}^{s-1} = \sum_{s=1}^r v^{r-s+1} h_{v,1}^{s-1}$$

$$\sum_{s=1}^r v^{r-s} h_{v,1}^s - \sum_{s=1}^r v^{r-s} h_{v-1,1}^{s-1} = \sum_{s=1}^r v^{r-s+1} h_{v,1}^{s-1}$$

$$\sum_{s=1}^{T-1} V^{T-s} h_{f_V}^s + h_{f_V}^T - \sum_{s=2}^T V^{T-s} h_{f_{V-1}}^{s-1} - V^{T-1} h_{f_{V-1}}^0 = \sum_{s=2}^T V^{T-s+1} h_{f_V}^{s-1} + V^T h_{f_V}^0$$

$$\downarrow s \parallel s+1$$

$$\sum_{s=1}^{T-1} V^{T-s} h_{f_V}^s + h_{f_V}^T - \sum_{s=2}^T V^{T-s} h_{f_{V-1}}^{s-1} - V^{T-1} \frac{(V-1)^V}{(V-1)!} = \sum_{s=1}^{T-1} V^{T-s} h_{f_V}^s + V^T \frac{(V-1)^{V+1}}{V!}$$

$$h_{f_V}^T - V^{T-1} \frac{(V-1)^V}{(V-1)!} = \sum_{s=2}^T V^{T-s} h_{f_{V-1}}^{s-1} - V^{T-1} \frac{(V-1)^V}{(V-1)!}$$

$$h_{f_V}^T = \sum_{s=2}^T V^{T-s} h_{f_{V-1}}^{s-1} \quad \text{für } V \geq 2$$

Ersetzt man $s \parallel s+1$, so ergibt sich für $h_{f_{V+1}}^T$:

$$h_{f_{V+1}}^T = \sum_{s=1}^{T-1} (V+1)^{T-s-1} h_{f_V}^s \quad \text{für } V \geq 1; \text{ zusätzlich sei nun } 1 \leq t \leq V$$

Weil hier $1 \leq s \leq T-1 \leq V-1$, folgt wegen der Voraussetzung für $V \geq 2$:

$$h_{f_{V+1}}^T = \sum_{s=1}^{T-1} (V+1)^{T-s-1} \cdot 0 \quad \text{für } V \geq 2 \text{ und } 1 \leq t \leq V$$

$$= 0$$

RS. 0 für $1 \leq t \leq V$ und $V \geq 2$

q.e.d.

6. Herleitungen bzw. Beweise der Ergebnisse für $h_{f_V}^T$ wenn $T \geq V$

a) $h_{f_V}^V = 1$

Aus (2) ergibt sich für $\lambda=0$, $V=V$ und $m=1$:

$$u_V = u_1 + \sum_{k=1}^{V-1} \Delta u_k$$

Bestimmt man darin $u_i = h_{f_i}^{i+h}$ (i natürlich; h beliebig teill), so folgt:

$$h_{f_V}^{V+h} = h_{f_1}^{1+h} + \sum_{k=1}^{V-1} \Delta h_{f_k}^{k+h}$$

2. eingesetzt ergibt weiter:

$$h_{f_V}^{V+h} = h_{f_1}^{1+h} + \sum_{k=1}^{V-1} (k+1) h_{f_{k+1}}^{k+h} \quad | k \parallel k-1$$

$$h_{f_V}^{V+h} = h_{f_1}^{1+h} + \sum_{k=2}^V k h_{f_k}^{k+h-1}$$

Wird nun noch 4. berücksichtigt, so folgt weiter:

$$h_{f_V}^{V+h} = h_{f_1}^{1+h} + \sum_{k=2}^V k h_{f_k}^{k+h-1}$$

$$= \sum_{k=1}^v k h_k^{v+h-1}$$

$$h_v^{v+h} = \sum_{k=1}^v k h_k^{v+h-1}$$

Daraus ergibt sich für $h=0$ in Verbindung mit 5.:

$$h_v^v = \sum_{k=1}^v k h_k^{v-1} = h_1^0 + \sum_{k=2}^v k h_k^{v-1} = 1$$

b) Rückführung von $h_v^{\tau} (\tau \geq v)$ auf T_{hv}

Aus a), 4. und 2. ergibt sich folgende Rekursivdarstellung für $h_v^{v+h} (h \geq 0)$:

$$\begin{cases} h_v^v := 1 \\ h_1^{v+h} := 1 \\ \Delta_{\mathbb{N}} h_v^{v+h} := (v+1) h_{v+1}^{v+h} \quad (h \text{ natürlich}) \end{cases}$$

Aus A2 II.4. folgt für T_{hv} , wenn $\alpha_i = i$:

$$\begin{cases} T_{0v} = T_0 = 1 \\ T_{1v} = \sum_{i=1}^v i \\ T_{hv} = 1 \\ \Delta_{\mathbb{N}} T_{hv} = (v+1) T_{(h-1)(v+1)} \quad (h \text{ natürlich}) \end{cases}$$

Da sich hier T_{1v} aus den übrigen Bedingungen ergibt, wenn h bei der Differenzbildung den Wert 1 annimmt, genügt T_{hv} für $\alpha_i = i$ auch folgender Rekursivdarstellung:

$$\begin{cases} T_{0v} = T_0 = 1 \\ T_{hv} = 1 \\ \Delta_{\mathbb{N}} T_{hv} = (v+1) T_{(h-1)(v+1)} \quad (h \text{ natürlich}) \end{cases}$$

Die Rekursivdarstellung von T_{hv} geht damit für $\alpha_i = i$ in die Rekursivdarstellung von $h_v^{v+h} (h \geq 0)$ über.

Es gilt also:

$$h_{\nu}^{v,h} = \tau_{h\nu} \quad \text{wobei } x_i = i; \text{ für } h \geq 0$$

oder:

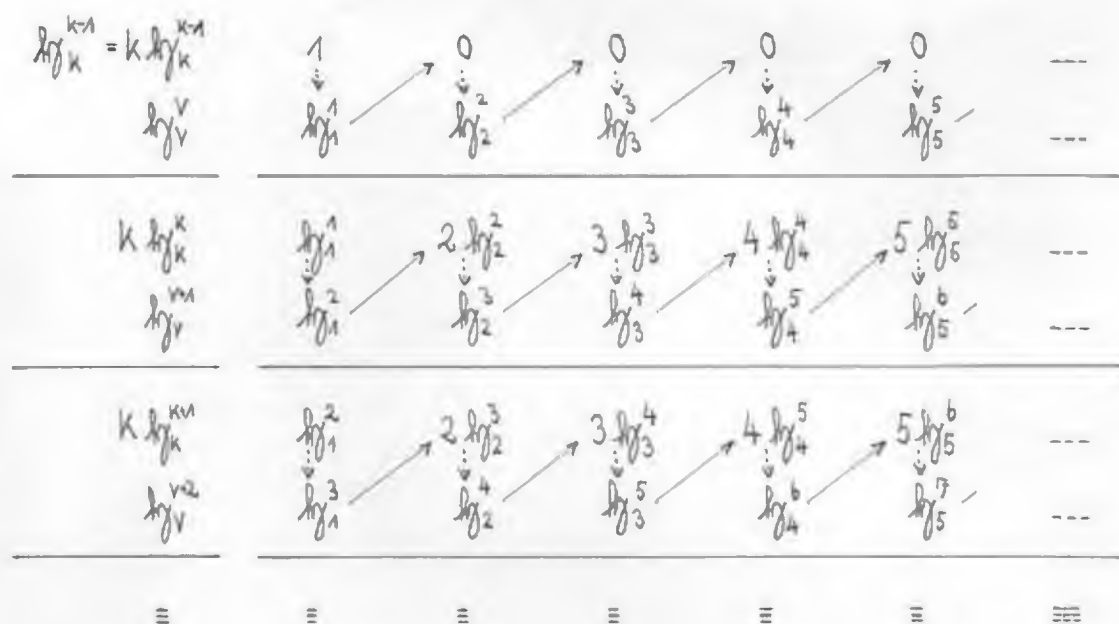
$$h_{\nu}^{\tau} = \tau_{(\tau-\nu)\nu} \quad \text{wobei } x_i = i; \text{ für } \tau \geq \nu$$

Diese Erkenntnis läßt sich in folgendem Satz formulieren:

Satz:

$h_{\nu}^{v,h}$ ($h \in \{0,1,2,\dots\}$) sind die Werte der vollkombinierten Funktionen $\tau_{h\nu}$ für $x_i = i$

Nun kann das Berechnungsschema für $\tau_{h\nu}$ durch Einsetzen von i für x_i auf $h_{\nu}^{v,h}$ ($h \geq 0$) übertragen werden unter Berücksichtigung der Formel in a):



Es wird in Richtung der punktierten Pfeile angeschrieben und in Richtung der ausgezogenen Pfeile addiert.

c) Beweise der speziellen Formeln

Die speziellen Formeln lassen sich beweisen, indem man zeigt, daß sie der Rekursivdarstellung für $h_{\nu}^{v,h}$ ($h \geq 0$) in b) genügen

$$a) h_{\nu}^{\nu,1} = \binom{\nu+1}{2}$$

Beweis:

$$\nu=1: \binom{1+1}{2} = 1$$

$$\Delta \binom{\nu+1}{2} = \binom{\nu+2}{2} - \binom{\nu+1}{2} = \frac{\nu^2+3\nu+2}{2} - \frac{\nu^2+\nu}{2} = (\nu+1) \cdot 1 \\ = (\nu+1) h_{\nu+1}^{\nu,1}$$

q.e.d.

$$b) h_{\nu}^{\nu,2} = \binom{\nu+2}{3} \frac{3\nu+1}{4}$$

Beweis:

$$\nu=1: \binom{1+2}{3} \frac{3 \cdot 1 + 1}{4} = 1$$

$$\Delta \binom{\nu+2}{3} \frac{3\nu+1}{4} = \binom{\nu+3}{3} \frac{3\nu+4}{4} - \binom{\nu+2}{3} \frac{3\nu+1}{4} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(3\nu+4)}{3! \cdot 4} - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(3\nu+1)}{3! \cdot 4} \\ = (3\nu^2+13\nu+12-3\nu^2-\nu) \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2 \cdot 12} = \frac{12\nu+12}{12} \binom{\nu+2}{2} = (\nu+1) \binom{\nu+2}{2} \\ = (\nu+1) h_{\nu+1}^{\nu,2}$$

q.e.d.

$$c) h_{\nu}^{\nu,3} = \binom{\nu+3}{4} \binom{\nu+1}{2}$$

Beweis:

$$\nu=1: \binom{1+3}{4} \binom{1+1}{2} = 1$$

$$\Delta \binom{\nu+3}{4} \binom{\nu+1}{2} = \binom{\nu+4}{4} \binom{\nu+2}{2} - \binom{\nu+3}{4} \binom{\nu+1}{2} = \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)(\nu+4)(\nu+1)(\nu+2)}{4! \cdot 2!} - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\nu(\nu+1)}{4! \cdot 2!} \\ = (\nu+1) \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3! \cdot 8} (\nu^2+6\nu+8-\nu^2) = (\nu+1) \binom{\nu+3}{3} \frac{3\nu+4}{4} \\ = (\nu+1) h_{\nu+1}^{\nu,3}$$

q.e.d.

e) Berechnung weiterer spezieller Formeln

Die allgemeine Methode zur Aufstellung der speziellen Formeln sowie eine Deutung des Ranges

von $h_{\nu}^{\nu,t}$ für $t \geq \nu$ kann erst später in E.III. angegeben werden.

f. Beweis der Formel $\sum_{i=\nu}^l \binom{l}{i} h_{\nu}^{\nu,i} = h_{\nu+1}^{\nu,l}$ ($l \in \{\nu, \nu+1, \nu+2, \dots\}$)

Diese Beziehung wird durch vollständige Induktion nach l bewiesen:

1. Schritt: $l=\nu$ erfüllt den Satz

$$\text{L.S. } \sum_{i=\nu}^{\nu} \binom{\nu}{i} h_{\nu}^{\nu,i} = \binom{\nu}{\nu} h_{\nu}^{\nu,\nu}$$

$$= 1$$

$$\text{R.S. } \log_{v,n}^{v,n} = 1$$

2. Schritt: Schluss von i auf $i+1$

$$\text{Vor: } \sum_{r=v}^i \binom{i}{r} \log_v^r = \log_{v,n}^{i+1}$$

$$\text{Beh: } \sum_{r=v}^{i+1} \binom{i+1}{r} \log_v^r = \log_{v,n}^{i+2}$$

Bew:

$$\begin{aligned} \text{L.S. } \sum_{r=v}^{i+1} \binom{i+1}{r} \log_v^r &= \sum_{r=v}^i \binom{i+1}{r} \log_v^r + \binom{i+1}{i+1} \log_v^{i+1} \\ &= \sum_{r=v}^i \left[\binom{i}{r} + \binom{i}{r-1} \right] \log_v^r + \log_v^{i+1} \\ &= \sum_{r=v}^i \binom{i}{r} \log_v^r + \sum_{r=v}^i \binom{i}{r-1} \log_v^r + \log_v^{i+1} \\ &= \log_{v,n}^{i+1} + \sum_{r=v+1}^{i+1} \binom{i}{r-1} \log_v^{r-1} + \binom{i}{v-1} \log_v^{v-1} \\ &\quad \downarrow r \mapsto r-1 \\ &= \log_{v,n}^{i+1} + \sum_{r=v}^i \binom{i}{r} \log_v^r + \binom{i}{v-1} \end{aligned}$$

aus 2. folgt:

$$\Delta \log_{v,n}^r = v \log_v^r \quad (\text{wobei auch } v=1 \text{ zulässig ist})$$

$$\log_v^{r+1} - \log_v^r = v \log_v^r$$

$$\log_v^{r+1} = \log_v^r + v \log_v^r$$

Das wird oben eingesetzt:

$$\begin{aligned} &= \log_{v,n}^{i+1} + \sum_{r=v}^i \binom{i}{r} \log_v^r + v \sum_{r=v}^i \binom{i}{r} \log_v^r + \binom{i}{v-1} \\ &= \log_{v,n}^{i+1} + \sum_{r=v+1}^{i+1} \binom{i}{r-1} \log_v^{r-1} + v \log_{v,n}^{i+1} \quad \text{für } v > 1 \quad \text{oder} \quad \log_{v,n}^{i+1} + 0 + v \log_{v,n}^{i+1} + 1 \quad \text{für } v=1 \\ &= (v+1) \log_{v,n}^{i+1} + \log_v^{i+1} \\ &= \log_{v,n}^{i+2} \end{aligned}$$

$$\text{R.S. } \log_{v,n}^{i+2}$$

q.e.d

II. Aufstellung der Formel für die λ -te Differenzfolge einer arithmetischen Folge n -ten Grades

Um das Bildungsgesetz der Formel zu ermitteln, werden zunächst einige Differenzfolgen der allgemeinen arithmetischen Folge n -ten Grades y_k berechnet:

$$\Delta^0 y_k = \sum_{i=0}^n a_i k^i$$

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k = \sum_{i=0}^n a_i (k+1)^i - \sum_{i=0}^n a_i k^i = \sum_{i=0}^n a_i [(k+1)^i - k^i] \quad | (k+1)^0 - k^0 = 0$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=1}^n a_i [(k+1)^i - k^i] & \text{für } n \geq 1 \\ 2. 0 & \text{für } n < 1 \end{cases}$$

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=1}^n a_i [(k+2)^i - (k+1)^i] - \sum_{i=1}^n a_i [(k+1)^i - k^i] & \text{für } n \geq 1 \\ 2. 0 - 0 & \text{für } n < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=1}^n a_i [(k+2)^i - 2(k+1)^i + k^i] & \text{für } n \geq 1 \\ 2. 0 & \text{für } n < 1 \end{cases} \quad | (k+2)^1 - 2(k+1)^1 + k^1 = 0$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=2}^n a_i [(k+2)^i - 2(k+1)^i + k^i] & \text{für } n \geq 2 \\ 2. 0 & \text{für } n < 2 \end{cases}$$

$$\Delta^3 y_k = \Delta^2 y_{k+1} - \Delta^2 y_k$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=2}^n a_i [(k+3)^i - 2(k+2)^i + (k+1)^i] - \sum_{i=2}^n a_i [(k+2)^i - 2(k+1)^i + k^i] & \text{für } n \geq 2 \\ 2. 0 - 0 & \text{für } n < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=2}^n a_i [(k+3)^i - 3(k+2)^i + 3(k+1)^i - k^i] & \text{für } n \geq 2 \\ 2. 0 & \text{für } n < 2 \end{cases} \quad | (k+3)^2 - 3(k+2)^2 + 3(k+1)^2 - k^2 = 0$$

$$= \begin{cases} 1. \sum_{i=3}^n a_i [(k+3)^i - 3(k+2)^i + 3(k+1)^i - k^i] & \text{für } n \geq 3 \\ 2. 0 & \text{für } n < 3 \end{cases}$$

Es liegt folgende Vermutung nahe:

$$\Delta^\lambda y_k = \begin{cases} 1. \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p)^i & \text{für } n \geq \lambda \\ 2. 0 & \text{für } n < \lambda \end{cases} \quad (y_k \text{ arithmetisch von } n\text{-ten Grad})$$

Da für $\lambda=0$ ohnehin alles klar ist, soll dieser Fall beim folgenden Induktionsbeweis nicht berücksichtigt werden.

Nun wird der erste Teil der Vermutung für $\lambda \neq 0$ durch vollständige Induktion nach λ bewiesen:

1. Schritt: $\lambda=1$ erfüllt den Satz

Diese Behauptung ist bereits als richtig erwiesen

2. Schritt: Schluß von λ auf $\lambda+1$

$$\text{Vor: } \Delta^\lambda y_k = \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p)^i \quad \text{für } n \geq \lambda \quad (\lambda \neq 0)$$

$$\text{Beh: } \Delta^{\lambda+1} y_k = \sum_{i=\lambda+1}^n a_i \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} (k+\lambda-p)^i \quad \text{für } n \geq \lambda+1$$

Bew:

$$\text{Ls. } \Delta^{\lambda+1} y_k = \Delta^\lambda y_{k+1} - \Delta^\lambda y_k$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p+1)^i - \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p)^i \quad (n \geq \lambda)$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[\sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p+1)^i - \sum_{p=0}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p)^i - (-1)^{\hat{\lambda}} k^i \right]$$

$$\begin{array}{c} | \\ p \parallel p-1 \\ \downarrow \end{array}$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[\sum_{p=1}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\hat{\lambda}}{p} (k+\lambda-p+1)^i - \sum_{p=1}^{\hat{\lambda}} (-1)^{p-1} \binom{\hat{\lambda}}{p-1} (k+\lambda-p+1)^i + (k+\lambda+1)^i - (-1)^{\hat{\lambda}} k^i \right]$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left\{ \sum_{p=1}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \left[\binom{\hat{\lambda}}{p} + \binom{\hat{\lambda}}{p-1} \right] (k+\lambda-p+1)^i + (k+\lambda+1)^i - (-1)^{\hat{\lambda}} k^i \right\}$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[\sum_{p=1}^{\hat{\lambda}} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} (k+\lambda-p+1)^i + (k+\lambda+1)^i - (-1)^{\lambda+1} k^i \right]$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} (k+\lambda-p+1)^i$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} (k+\lambda-p+1)^i = 0$. Um das zu beweisen wird der Summenausdruck nach Potenzen von k entwickelt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^{\lambda+1} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} (k \cdot \lambda - p + 1)^\lambda \\
&= \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^p \binom{\lambda+1}{p} \sum_{r=0}^{\lambda} k^r (\lambda - p + 1)^{\lambda-r} \binom{\lambda}{r} + (-1)^{\lambda+1} k^\lambda \\
&= (-1)^0 \binom{\lambda+1}{0} \sum_{r=0}^{\lambda} k^r (\lambda - 0 + 1)^{\lambda-r} \binom{\lambda}{r} + \dots + (-1)^{\lambda} \binom{\lambda+1}{\lambda} \sum_{r=0}^{\lambda} k^r (\lambda - \lambda + 1)^{\lambda-r} \binom{\lambda}{r} + (-1)^{\lambda+1} k^\lambda \\
&= (-1)^0 \binom{\lambda+1}{0} k^0 (\lambda - 0 + 1)^\lambda \binom{\lambda}{0} + \dots + (-1)^{\lambda} \binom{\lambda+1}{\lambda} k^\lambda (\lambda - 0 + 1)^0 \binom{\lambda}{\lambda} \\
&\quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \\
&+ (-1)^{\lambda} \binom{\lambda+1}{\lambda} k^0 (\lambda - \lambda + 1)^\lambda \binom{\lambda}{0} + \dots + (-1)^{\lambda} \binom{\lambda+1}{\lambda} k^\lambda (\lambda - \lambda + 1)^0 \binom{\lambda}{\lambda} + (-1)^{\lambda+1} k^\lambda \\
&= \binom{\lambda}{0} k^0 \sum_{p=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p (\lambda - p + 1)^\lambda + \dots + \binom{\lambda}{\lambda} k^\lambda \sum_{p=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p (\lambda - p + 1)^0 + (-1)^{\lambda+1} k^\lambda \\
&= \sum_{m=0}^{\lambda} \left[\binom{\lambda}{m} k^m \sum_{p=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p (\lambda - p + 1)^{\lambda-m} \right] + (-1)^{\lambda+1} k^\lambda \\
&= \sum_{m=0}^{\lambda-1} \left[\binom{\lambda}{m} k^m \sum_{p=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p (\lambda - p + 1)^{\lambda-m} \right] + k^\lambda \sum_{p=0}^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p
\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \sum_{p=0}^{\lambda} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p (\lambda - p + 1)^{\lambda-m} \quad (1 \leq \lambda - m \leq \lambda) \quad | \lambda - p + 1 \parallel u \\
&= \sum_{u=1}^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\lambda+1-u} (-1)^{\lambda+1-u} u^{\lambda-m} \quad | \lambda+1 \parallel v \text{ wobei } v > 1
\end{aligned}$$

$$= \sum_{u=1}^v \binom{v}{v-u} (-1)^{v-u} u^{\lambda-m} \quad (1 \leq \lambda - m \leq v; v > 1)$$

$$= v! \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{u^{\lambda-m}}{u! (v-u)!}$$

$$= v! \operatorname{Idg}_v^{\lambda-m}$$

$$= 0$$

$$(b) \quad \sum_{p=0}^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{p} (-1)^p \quad | p \parallel p-1$$

$$= \sum_{p=1}^{\lambda+2} \binom{\lambda+1}{p-1} (-1)^{p-1} \quad | \lambda+2 \parallel v \text{ wobei } v > 2$$

$$= \sum_{p=1}^v \binom{v-1}{p-1} (-1)^{p-1}$$

$$= (-1)^{v-1} (v-1)! \sum_{p=1}^v (-1)^{v-p} \frac{1}{(p-1)! (v-p)!}$$

$$= (-1)^{v-1} (v-1)! \sum_{p=1}^v (-1)^{v-p} \frac{p}{p! (v-p)!}$$

$$= (-1)^{v-1} (v-1)! \frac{1}{q!}$$

$$= 0$$

(a) und (b) oben berücksichtigt ergibt:

$$= 0$$

Das heißt weiter, daß:

$$\Delta^{\lambda m} y_k = \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\lambda m} (-1)^p \binom{\lambda m}{p} (k \cdot \lambda - p + 1)^i \quad \text{für } n \geq \lambda, \text{ also auch für } n \geq \lambda + 1$$

$$\text{R.S. } \sum_{i=\lambda+1}^n a_i \sum_{p=0}^{\lambda m} (-1)^p \binom{\lambda m}{p} (k \cdot \lambda - p + 1)^i \quad \text{für } n \geq \lambda + 1$$

q.e.d.

Nun wird der erste Teil der Formel für $\lambda=0$, der jetzt sicher stimmt, geordnet:

$$\begin{aligned} \Delta^{\lambda} y_k &= \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{p=0}^{\lambda} (-1)^p \binom{\lambda}{p} (k \cdot \lambda - p)^i \\ &= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[(-1)^0 \binom{\lambda}{0} (k \cdot \lambda)^i + (-1)^1 \binom{\lambda}{1} (k \cdot \lambda - 1)^i + \dots + (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\lambda-1} (k \cdot \lambda - \lambda + 1)^i + (-1)^{\lambda} \binom{\lambda}{\lambda} k^i \right] \\ &= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[(-1)^0 \binom{\lambda}{0} \binom{i}{0} k^i + (-1)^0 \binom{\lambda}{0} \binom{i}{1} k^{i-1} \lambda + \dots + (-1)^0 \binom{\lambda}{0} \binom{i}{i} k^0 \lambda^i \right. \\ &\quad + (-1)^1 \binom{\lambda}{1} \binom{i}{0} k^i + (-1)^1 \binom{\lambda}{1} \binom{i}{1} k^{i-1} (\lambda - 1) + \dots + (-1)^1 \binom{\lambda}{1} \binom{i}{i} k^0 (\lambda - 1)^i \\ &\quad \equiv \quad \quad \quad \equiv \quad \quad \quad \equiv \quad \quad \quad \equiv \\ &\quad + (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\lambda-1} \binom{i}{0} k^i + (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\lambda-1} \binom{i}{1} k^{i-1} \lambda + \dots + (-1)^{\lambda-1} \binom{\lambda}{\lambda-1} \binom{i}{i} k^0 \lambda^i \\ &\quad \left. + (-1)^{\lambda} \binom{\lambda}{\lambda} \binom{i}{0} k^i \right] \end{aligned} \quad (\text{Binomialsatz})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[\binom{i}{0} k^i \sum_{q=0}^{\lambda} (-1)^q \binom{\lambda}{q} + \binom{i}{1} k^{i-1} \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda - q) + \dots + \binom{i}{i} k^0 \sum_{q=0}^{\lambda} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda - q)^i \right] \\ &= \sum_{i=\lambda}^n a_i \left[\binom{i}{0} k^i \sum_{q=0}^{\lambda} (-1)^q \binom{\lambda}{q} + \sum_{m=1}^{\lambda-1} \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda - q)^m + \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda - q)^m \right] \end{aligned}$$

Nun ist:

$$(a) \sum_{q=0}^{\lambda} (-1)^q \binom{\lambda}{q}$$

$|q| \leq \lambda - 1$; $\lambda + 1/v$ wobei $v > 1$

$$= \sum_{q=1}^{\lambda} (-1)^{q-1} \binom{\lambda-1}{q-1}$$

$$= (-1)^{\lambda-1} (\lambda-1)! \sum_{q=1}^{\lambda} (-1)^{q-1} \frac{1}{(q-1)!}$$

$$= (-1)^{v-1} (v-1)! \delta_v^1$$

$$= 0$$

$$(b) \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda-q)^m \quad | \lambda-q \parallel u$$

$$= \sum_{u=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-u} \binom{\lambda}{\lambda-u} u^m$$

$$= \lambda! \sum_{u=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-u} \frac{u^m}{u! (\lambda-u)!}$$

$$= \lambda! \delta_{\lambda}^m$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 1 \\ \lambda! & \text{für } \lambda = 1 \end{cases}$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum_{m=1}^{\lambda-1} \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda-q)^m$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 1 \\ \sum_{m=1}^0 \binom{i}{m} \lambda! k^{i-m} & \text{für } \lambda = 1 \end{cases}$$

$$= 0$$

(a) und (b) in der Hauptrechnung berücksichtigt ergibt:

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{q=0}^{\lambda-1} (-1)^q \binom{\lambda}{q} (\lambda-q)^m \quad | \lambda-q \parallel u$$

$$= \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{u=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-u} \binom{\lambda}{\lambda-u} u^m$$

$$= \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} k^{i-m} \sum_{u=1}^{\lambda} (-1)^{\lambda-u} \frac{u^m}{u! (\lambda-u)!}$$

$$= \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} \delta_{\lambda}^m k^{i-m}$$

Jetzt läßt sich der erste Teil der Formel für die λ -te Differenzfolge so schreiben:

$$\Delta_{\lambda}^{\lambda} y_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } \lambda=0 \\ \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} \delta_{\lambda}^m k^{i-m} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \end{cases}$$

Aus dieser Erkenntnis wird der zweite Teil der Vermutung bewiesen:

Zunächst wird $\Delta^n y_k$ berechnet:

$$\Delta^n y_k = \begin{cases} \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } n=0 \\ n! \sum_{i=n}^n a_i \sum_{m=0}^i \binom{i}{m} h_{\lambda}^m k^{i-m} & \text{für } n>0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_0 k^0 & \text{für } n=0 \\ n! a_n \binom{n}{n} h_{\lambda}^n k^0 & \text{für } n>0 \end{cases}$$

$$= n! a_n$$

Nun ist weiter:

$$\Delta^{n+1} y_k = n! a_n - n! a_n = 0$$

Weitere Differenzfolgen $\Delta^{n+2} y_k$ ($n \in \{2, 3, 4, \dots\}$) werden dann selbstverständlich auch zu Null.

q.e.d.

Man erhält nun folgende Formel:

$$\Delta^{\lambda} \sum_{i=0}^n a_i k^i = \begin{cases} 1. \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} h_{\lambda}^m k^{i-m} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \\ 3. 0 & \text{für } \lambda > n \end{cases} \quad (5^*)$$

Der zweite Teil dieser Formel wird noch nach Potenzen von k geordnet:

$$\begin{aligned} & \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} h_{\lambda}^m k^{i-m} \\ &= \lambda! \left[a_{\lambda} \sum_{m=\lambda}^{\lambda} \binom{\lambda}{m} h_{\lambda}^m k^{\lambda-m} + a_{\lambda+1} \sum_{m=\lambda}^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{m} h_{\lambda}^m k^{\lambda+1-m} + \dots + a_n \sum_{m=\lambda}^n \binom{n}{m} h_{\lambda}^m k^{n-m} \right] \\ &= \lambda! \left[a_{\lambda} \binom{\lambda}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^0 + a_{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^1 + a_{\lambda+2} \binom{\lambda+2}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^2 + \dots + a_n \binom{n}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^{n-\lambda} \right] \\ &= \lambda! \left[k^0 \sum_{p=\lambda}^n \binom{p}{p} h_{\lambda}^p a_p + k^1 \sum_{p=\lambda}^n \binom{p+1}{p} h_{\lambda}^p a_{p+1} + \dots + k^{n-\lambda} \sum_{p=\lambda}^n \binom{p}{p} h_{\lambda}^p a_p \right] \end{aligned}$$

$$= \lambda! \sum_{i=0}^{n-\lambda} k^i \sum_{p=\lambda}^{n-i} \binom{p-i}{p} h_{\lambda}^p a_{p-i}$$

(5*) schreibt sich dann nach Potenzen von k geordnet so:

$$\Delta^{\lambda} \sum_{i=0}^n a_i k^i = \begin{cases} 1. \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=0}^{n-\lambda} k^i \sum_{p=\lambda}^{n-i} \binom{p-i}{p} h_{\lambda}^p a_{p-i} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \\ 3. 0 & \text{für } \lambda > n \end{cases} \quad (5)$$

Schließlich wird der Koeffizient (im folgenden mit $b_{n-\lambda}$ bezeichnet) der höchsten Potenz von k in $\Delta^{\lambda} y_k$ für $0 < \lambda \leq n$ berechnet, um festzustellen, ob die höchste Potenz verschwinden kann:

$$b_{n-\lambda} = \lambda! \sum_{p=\lambda}^{n-n+\lambda} \binom{p-n+\lambda}{p} h_{\lambda}^p a_{p-n+\lambda} \quad (0 < \lambda \leq n)$$

$$= \lambda! \binom{\lambda+n-\lambda}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} a_{\lambda+n-\lambda}$$

$$= \lambda! \binom{n}{\lambda} a_n \quad \text{wobei nach Definition } a_n \neq 0$$

$$\hookrightarrow b_{n-\lambda} \neq 0$$

Aus dieser Erkenntnis lässt sich im Zusammenhang mit (5) folgender Satz formulieren:

Satz I:

Die λ -te ($\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Differenzfolge einer arithmetischen Folge n -ten ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Grades ist

für $\lambda \leq n$ wieder eine arithmetische Folge und zwar genau $(n-\lambda)$ -ten Grades

und für $\lambda > n$ die konstante Folge 0.

Ist die Folge selbst gegeben, so errechnet sich die Differenzfolge aus (5).

III. Zusammenhang zwischen λ -ter Differenzfolge und λ -ter Ableitung bei ganzen Funktionen

Für y als ganze rationale Funktion gilt, wie durch vollständige Induktion leicht zu zeigen ist, für ihre q -ten ($q \in \{0, 1, \dots, n\}$) Ableitungen an den Stellen (k/y_k) :

$$\frac{d^q y}{dx^q} (k/y_k) = d^q y_k = q! \sum_{i=0}^{n-q} \binom{q+i}{q} a_{q+i} k^i$$

Die Ordnung von $(5^{**})_2$ nach h_{λ}^m ergibt:

$$\begin{aligned}
 \Delta^{\lambda} y_k &= \lambda! \sum_{i=\lambda}^n a_i \sum_{m=\lambda}^i \binom{i}{m} h_{\lambda}^m k^{i-m} \quad (0 < \lambda \leq n) \\
 &= \lambda! \left[a_{\lambda} \sum_{m=\lambda}^{\lambda} \binom{\lambda}{m} h_{\lambda}^m k^{\lambda-m} + a_{\lambda+1} \sum_{m=\lambda}^{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{m} h_{\lambda}^m k^{\lambda+1-m} + \dots + a_n \sum_{m=\lambda}^n \binom{n}{m} h_{\lambda}^m k^{n-m} \right] \\
 &= \lambda! \left[a_{\lambda} \binom{\lambda}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^0 \right. \\
 &\quad \left. + a_{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^1 + a_{\lambda+1} \binom{\lambda+1}{\lambda+1} h_{\lambda}^{\lambda+1} k^0 \right. \\
 &\quad \left. + a_n \binom{n}{\lambda} h_{\lambda}^{\lambda} k^{n-\lambda} + a_n \binom{n}{\lambda+1} h_{\lambda}^{\lambda+1} k^{n-\lambda-1} + \dots + a_n \binom{n}{n} h_{\lambda}^n k^0 \right] \\
 &= \lambda! \left[h_{\lambda}^{\lambda} \sum_{i=0}^{n-\lambda} \binom{\lambda+i}{\lambda} a_{\lambda+i} k^i + h_{\lambda}^{\lambda+1} \sum_{i=0}^{n-\lambda-1} \binom{\lambda+i+1}{\lambda+1} a_{\lambda+i+1} k^i + \dots + h_{\lambda}^n \sum_{i=0}^0 \binom{\lambda+i+n-\lambda}{\lambda+n-\lambda} a_{\lambda+i+n-\lambda} k^i \right] \\
 &= \lambda! \sum_{p=\lambda}^n h_{\lambda}^p \sum_{i=0}^{n-p} \binom{p+i}{p} a_{p+i} k^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^{\lambda} y_k &= \lambda! \sum_{p=\lambda}^n \frac{h_{\lambda}^p}{p!} \cdot p! \sum_{i=0}^{n-p} \binom{p+i}{p} a_{p+i} k^i \\
 &= \lambda! \sum_{p=\lambda}^n \frac{h_{\lambda}^p}{p!} d^p y_k \quad | \text{ p!i} \\
 &= \lambda! \sum_{i=\lambda}^n \frac{h_{\lambda}^i}{i!} d^i y_k
 \end{aligned}$$

Man erhält also folgende Beziehung, wenn man noch berücksichtigt, daß für $\lambda > n$ $\Delta^{\lambda} y_k = d^{\lambda} y_k = 0$:

$$\Delta^{\lambda} y_k = \begin{cases} 1. y_k & \text{für } \lambda = 0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=\lambda}^n \frac{h_{\lambda}^i}{i!} d^i y_k & \text{für } 0 < \lambda \leq n \\ 3. d^{\lambda} y_k & \text{für } \lambda > n \end{cases} \quad (5^{**})$$

, wobei y ganz rational und k natürlich ist.

D. Aufstellung einer arithmetischen Folge n-ten Grades aus Differenzfolgen

I. Hilfssatz

$$\sum_{k=1}^n \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n+i)!}{(n-1)!(i+1)} \quad (n \text{ natürlich}) \quad (6)$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n

1. Schritt: $n=1$ erfüllt den Satz

LS. $i!$

RS. $\frac{(i+1)!}{i+1} = i!$

2. Schritt: Schluß von n auf $n+1$

Vor: $\sum_{k=1}^n \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n+i)!}{(n-1)!(i+1)}$

Beh.: $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n+1+i)!}{n!(i+1)}$

Bew.:

$$\begin{aligned} \text{LS. } \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} &= \sum_{k=1}^n \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} + \frac{(i+n)!}{n!} = \frac{(n+i)!}{(n-1)!(i+1)} + \frac{(i+n)!}{n!} \\ &= \frac{(n+i)! \cdot n + (i+n)! \cdot (i+1)}{n! \cdot (i+1)} = \frac{(n+i)! \cdot (n+i+1)}{n! \cdot (i+1)} \\ &= \frac{(n+i+1)!}{n! \cdot (i+1)} \end{aligned}$$

RS. $\frac{(n+1+i)!}{n! \cdot (i+1)}$

q.e.d.

Anders geschrieben sieht (6) so aus:

$$\sum_{k=1}^n \binom{i+k-1}{i} = \binom{n+i}{i+1} \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^n \prod_{q=0}^{i-1} (k+q) = \frac{i!}{i+1} \binom{n+i}{i+1} \quad (n \text{ natürlich})$$

II. Aufstellung einer arithmetischen Folge n-ten Grades aus Differenzfolgen

Es wird die Aufgabe gestellt, eine Folge y_k ($k=1,2,3,\dots$) anzugeben, bei der $\Delta^a y_k = 0$ für alle k.

Für $a=0$ ist die Folge sofort angebar: $y_k = 0$. Weiterhin soll deshalb $a \neq 0$ sein.

Für $\Delta^{a-1} y_k$ gibt es nun zwei Möglichkeiten: Entweder ist $\Delta^{a-1} y_k = 0$ für alle k. Dann kann man unbeschadet $a-1 \parallel a$ und die Überlegung ist wieder auf das Grundproblem zurücktransformiert. Die zweite Möglichkeit ist, daß $\Delta^{a-1} y_k \neq 0$ für mindestens ein k. Mit diesem Fall wird man sich zu beschäftigen haben:

Aus (2*) folgt, wenn $\Delta^q y_k = 0$ für alle k und $\Delta^{q-1} y_k \neq 0$ für mindestens ein k :

$$\begin{aligned}\Delta^{q-1} y_v &= \Delta^{q-1} y_m + \sum_{k=1}^{v-1} \Delta^q y_k - \sum_{k=1}^{m-1} \Delta^q y_k \quad \text{für alle } v \text{ und } m \\ &= \Delta^{q-1} y_m\end{aligned}$$

Nun gibt es aber sicher ein $\bar{m}$ mit $\Delta^{q-1} y_{\bar{m}} \neq 0$. Es werde oben für $m = \bar{m}$ eingesetzt:

$$\Delta^{q-1} y_v = \Delta^{q-1} y_{\bar{m}} \neq 0 \quad \text{für alle } v$$

Für die gesuchte Folge y_k ist also die Folge $\Delta^{q-1} y_v$ eine konstante Folge ungleich Null.

Diese Erkenntnis gibt zusammen mit (2) eine Rekursivdarstellung der gesuchten Folge.

Um das Bildungsgesetz der independenten Darstellung der gesuchten Folge zu erforschen, wird die Rekursivbeziehung einige Male auf sich angewendet:

$$\begin{aligned}\Delta^{q-2} y_v &= \Delta^{q-2} y_m + \sum_{k=1}^{v-1} \Delta^{q-1} y_k - \sum_{k=1}^{m-1} \Delta^{q-1} y_k \\ &= \Delta^{q-2} y_m + (v-1) \Delta^{q-1} y_m - (m-1) \Delta^{q-1} y_m \\ &= \Delta^{q-2} y_m + (v-m) \Delta^{q-1} y_m\end{aligned}$$

$$\Delta^{q-3} y_v = \begin{cases} 1. \Delta^{q-3} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{q-2} y_k & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{q-3} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{q-3} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{q-2} y_k & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{q-3} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} [\Delta^{q-2} y_m + (k-m) \Delta^{q-1} y_m] & \text{für } v > m \quad | \quad k \parallel m+k \\ 2. \Delta^{q-3} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{q-3} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} [\Delta^{q-2} y_m + (k-m) \Delta^{q-1} y_m] & \text{für } v < m \quad | \quad k \parallel m-k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{q-3} y_m + \sum_{k=0}^{v-m-1} [\Delta^{q-2} y_m + k \Delta^{q-1} y_m] & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{q-3} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{q-3} y_m - \sum_{k=1}^{m-v} [\Delta^{q-2} y_m + (-k) \Delta^{q-1} y_m] & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-3} y_m + (v-m) \Delta^{a-2} y_m + \sum_{k=1}^{v-m-1} k \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-3} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-3} y_m - \sum_{k=1}^{m-v} [\Delta^{a-2} y_m - k \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-3} y_m + (v-m) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-3} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-3} y_m - (m-v) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(m-v)(m-v-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \Delta^{a-3} y_m + (v-m) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m$$

$$\Delta^{a-4} y_v = \begin{cases} 1. \Delta^{a-4} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{a-3} y_k & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-4} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-4} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{a-3} y_k & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-4} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} [\Delta^{a-3} y_m + (k-m) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(k-m)(k-m-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v > m \mid k \parallel m+k \\ 2. \Delta^{a-4} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-4} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} [\Delta^{a-3} y_m + (k-m) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(k-m)(k-m-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v < m \mid k \parallel m-k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-4} y_m + \sum_{k=0}^{v-m-1} [\Delta^{a-3} y_m + k \Delta^{a-2} y_m + \frac{k(k-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-4} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-4} y_m - \sum_{k=1}^{m-v} [\Delta^{a-3} y_m + (-k) \Delta^{a-2} y_m + \frac{(-k)(-k-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-4} y_m + (v-m) \Delta^{a-3} y_m + \sum_{k=1}^{v-m-1} k \Delta^{a-2} y_m + \sum_{k=2}^{v-m-1} \frac{k(k-1)}{2} \Delta^{a-1} y_m \\ \quad \quad \quad \downarrow k \parallel k-1 \\ = \Delta^{a-4} y_m + (v-m) \Delta^{a-3} y_m + \sum_{k=1}^{v-m-1} k \Delta^{a-2} y_m + \sum_{k=1}^{v-m-2} \frac{k(k+1)}{2} \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-4} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-4} y_m - \sum_{k=1}^{m-v} [\Delta^{a-3} y_m - k \Delta^{a-2} y_m + \frac{k(k+1)}{2} \Delta^{a-1} y_m] & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-4} y_m + (v-m) \Delta^{a-3} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)}{2} \Delta^{a-2} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)(v-m-2)}{6} \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a-4} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-4} y_m - (m-v) \Delta^{a-3} y_m + \frac{(m-v)(m-v+1)}{2} \Delta^{a-2} y_m - \frac{(m-v)(m-v+1)(m-v+2)}{6} \Delta^{a-1} y_m & \text{für } v < m \end{cases}$$

$$= \Delta^{a-4} y_m + (v-m) \Delta^{a-3} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)}{2} \Delta^{a-2} y_m + \frac{(v-m)(v-m-1)(v-m-2)}{6} \Delta^{a-1} y_m$$

Es liegt folgende Vermutung nahe:

$$\Delta^{a-\mu} y_v = \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(\mu-p)!} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (v-m-i) \quad (0 \leq \mu \leq a; a \neq 0; \Delta^{a-1} y_m \neq 0)$$

Beweis durch vollständige Induktion nach μ :

1. Schritt: $\mu = 0$ erfüllt den Satz wegen Definition von Σ

$\mu = 1$ erfüllt den Satz wegen Definition von Δ

$\mu = 2$ erfüllt den Satz für $a \geq 2$

Das ist bereits gezeigt

2. Schritt: Schluß von μ auf $\mu+1$

$$\text{Vor: } \Delta^{a-\mu} y_v = \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(\mu-p)!} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (v-m-i) \quad (\mu \leq a)$$

$$\text{Beh: } \Delta^{a-\mu-1} y_v = \sum_{p=1}^{\mu+1} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(\mu-p+1)!} \prod_{i=0}^{\mu-p} (v-m-i) \quad (\mu < a)$$

Bew:

$$\text{L.S. } \Delta^{a-\mu-1} y_v = \begin{cases} 1. \Delta^{a-\mu-1} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \Delta^{a-\mu} y_k & \text{für } v > m \text{ wenn } \mu < a \\ 2. \Delta^{a-\mu-1} y_m & \text{für } v = m \text{ wenn } \mu < a \\ 3. \Delta^{a-\mu-1} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} \Delta^{a-\mu} y_k & \text{für } v < m \text{ wenn } \mu < a \end{cases} \quad (\text{wegen (2)})$$

$$= \begin{cases} 1. \Delta^{a-\mu-1} y_m + \sum_{k=m}^{v-1} \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(\mu-p)!} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-m-i) & \text{für } v > m \quad |k| \leq m+k \\ 2. \Delta^{a-\mu-1} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a-\mu-1} y_m - \sum_{k=v}^{m-1} \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(\mu-p)!} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-m-i) & \text{für } v < m \quad |k| \leq m-k \end{cases} \quad (\text{wegen Vor.})$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 1. \Delta^{a, \mu-1} y_m + \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{k=0}^{v-m-1} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-i) & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a, \mu-1} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a, \mu-1} y_m - \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{k=1}^{m-v} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (-k-i) & \text{für } v < m \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1. \Delta^{a, \mu-1} y_m + \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{k=\mu-p}^{v-m-1} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-i) & \text{für } v > m \quad | \quad k \neq \mu-p-1, i \neq \mu-p-i-1 \\ 2. \Delta^{a, \mu-1} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a, \mu-1} y_m - \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{\mu-p} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{k=1}^{m-v} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-i) & \text{für } v < m \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1. \Delta^{a, \mu-1} y_m + \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{k=1}^{v-m+\mu-p} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-i) & \text{für } v > m \\ 2. \Delta^{a, \mu-1} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a, \mu-1} y_m - \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{\mu-p} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \frac{\prod_{i=0}^{\mu-p} (m-v+i)}{(\mu-p+1)} & \text{für } v < m \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1. \Delta^{a, \mu-1} y_m + \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \frac{\prod_{i=0}^{\mu-p} (v-m+\mu-p+i)}{(\mu-p+1)} & \text{für } v > m \quad | \quad i \neq \mu-p-i \\ 2. \Delta^{a, \mu-1} y_m & \text{für } v = m \\ 3. \Delta^{a, \mu-1} y_m + \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p+1)!} \prod_{i=0}^{\mu-p} (v-m-i) & \text{für } v < m \end{cases} \\
 &= \sum_{p=1}^{\mu+1} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p+1)!} \prod_{i=0}^{\mu-p} (v-m-i)
 \end{aligned}$$

R.S. $\sum_{p=1}^{\mu+1} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p+1)!} \prod_{i=0}^{\mu-p} (v-m-i)$

q.e.d.

Für die gesuchte Folge gilt also :

$$\Delta^{a, \mu} y_k = \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a, p} y_m}{(\mu-p)!} \prod_{i=0}^{\mu-p-1} (k-m-i) \quad \text{wobei } 0 \leq \mu \leq a, a \neq 0, \Delta^{a, 1} y_m \neq 0$$

(7*)

Hierbei sind $\Delta^{a, p} y_m$ ($1 \leq p \leq \mu$) falls $\mu \neq 0$ als gegebene, zur zahlenmäßigen Berechnung nötige konstante Größen anzusehen.

Um (f^*) nach Potenzen von k ordnen zu können, werden die elementarsymmetrischen Funktionen benötigt.

Wird die Formel in A2I.5. für $z=k$, $n=\mu-p$, ferner $x_i = m+i-1$ in (f^*) nach $i=1$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta^{a,\mu} y_k &= \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a,p} y_m}{(\mu-p)!} \sum_{i=0}^{\mu-p} (-1)^{\mu-p-i} \sigma_{(\mu-p-i)(\mu-p)} k^i \quad \text{wobei } x_i = m+i-1 \\ &= \sum_{p=1}^{\mu} \frac{\Delta^{a,p} y_m}{(\mu-p)!} [(-1)^{\mu-p-0} \sigma_{(\mu-p-0)(\mu-p)} k^0 + (-1)^{\mu-p-1} \sigma_{(\mu-p-1)(\mu-p)} k^1 + \dots + (-1)^{\mu-p-(\mu-p)} \sigma_{(\mu-p-(\mu-p))(\mu-p)} k^{\mu-p}] \\ &= \frac{\Delta^{a,1} y_m}{(\mu-1)!} (-1)^{\mu-1-0} \sigma_{(\mu-1-0)(\mu-1)} k^0 + \frac{\Delta^{a,1} y_m}{(\mu-1)!} (-1)^{\mu-1-1} \sigma_{(\mu-1-1)(\mu-1)} k^1 + \dots + \frac{\Delta^{a,1} y_m}{(\mu-1)!} (-1)^{\mu-1-(\mu-1)} \sigma_{(\mu-1-(\mu-1))(\mu-1)} k^{\mu-1} \\ &\quad + \frac{\Delta^{a,2} y_m}{(\mu-2)!} (-1)^{\mu-2-0} \sigma_{(\mu-2-0)(\mu-2)} k^0 + \frac{\Delta^{a,2} y_m}{(\mu-2)!} (-1)^{\mu-2-1} \sigma_{(\mu-2-1)(\mu-2)} k^1 + \dots \\ &\quad \equiv \quad \equiv \quad = \\ &\quad + \frac{\Delta^{a,\mu} y_m}{(\mu-\mu)!} (-1)^{\mu-\mu-0} \sigma_{(\mu-\mu-0)(\mu-\mu)} k^0 \end{aligned}$$

$$= k^0 \sum_{p=1}^{\mu} (-1)^{\mu-p-0} \sigma_{(\mu-p-0)(\mu-p)} \frac{\Delta^{a,p} y_m}{(\mu-p)!} + k^1 \sum_{p=1}^{\mu-1} (-1)^{\mu-p-1} \sigma_{(\mu-p-1)(\mu-p)} \frac{\Delta^{a,p} y_m}{(\mu-p)!} + \dots + k^{\mu-1} \sum_{p=1}^1 (-1)^{\mu-p-(\mu-1)} \sigma_{(\mu-p-(\mu-1))(\mu-p)} \frac{\Delta^{a,p} y_m}{(\mu-p)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-i} (-1)^{a-p-i} \sigma_{(a-p-i)(a-p)} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(a-p)!}$$

Damit hat die gesuchte Folge folgende Eigenschaft:

$$\Delta^{a-\mu} y_k = \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-i} (-1)^{a-p-i} \sigma_{(a-p-i)(a-p)} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(a-p)!} \quad (x_i = m+i-1) \quad (7)$$

wobei $0 \leq \mu \leq a$, $a \neq 0$, $\Delta^{a-1} y_m \neq 0$

Schließlich wird der Koeffizient (mit $b_{\mu-1}$ bezeichnet) der höchsten Potenz von k in $\Delta^{a-\mu} y_k$ für $0 < \mu \leq a$ berechnet, um festzustellen, ob die höchste Potenz verschwinden kann:

$$\begin{aligned} b_{\mu-1} &= \sum_{p=1}^1 (-1)^{a-p} \sigma_{(a-p)(a-p)} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(a-p)!} \\ &= (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^{a-1} y_m}{(a-1)!} \\ &= \frac{\Delta^{a-1} y_m}{(a-1)!} \quad \text{wobei nach Voraussetzung } \Delta^{a-1} y_m \neq 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow b_{\mu-1} \neq 0$$

Für $0 < \mu \leq a$ ist der Grad von $\Delta^{a-\mu} y_k$ also genau $(a-1)$. Für $\mu=0$ ist natürlich $\Delta^{a-\mu} y_k = 0$.

Die Folge y_k selbst stellt sich, wenn in (7) $\mu=a$ gesetzt wird, so dar:

$$y_k = \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-i} (-1)^{a-p-i} \sigma_{(a-p-i)(a-p)} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(a-p)!} \quad (x_i = m+i-1) \quad (7^{**})$$

wobei $a \neq 0$ und $\Delta^{a-1} y_m \neq 0$

Der Grad der Folge y_k ist nun genau $a-1$. Deshalb lässt sich im Zusammenhang mit (7**) folgender Satz formulieren:

Satz I:

Ist die a -te (a natürlich) Differenzfolge einer Folge y_k die konstante Folge 0 und ist irgendeine $(a-1)$ -te Differenz dieser Folge y_k ungleich Null, so ist y_k eine arithmetische Folge genau $(a-1)$ -ten Grades.

Sind $\Delta^q y_m$ ($q \in \{0, 1, \dots, a-1\}$) gegeben, so errechnet sich y_k aus (7**).

E. Anwendungen zu D

I. Definition der arithmetischen Folge n-ten Grades

Satz I und Satz II erlauben eine neue Definition für die arithmetische Folge n-ten Grades:

Definition:

Eine Folge y_k ($k=1,2,3,\dots$) heißt arithmetische Folge n-ten ($n \in \{0,1,2,\dots\}$) Grades, wenn

$$\Delta^{n+1} y_k = 0 \quad \text{für alle } k$$

und $\Delta^n y_k \neq 0$ für mindestens ein k .

Diese Definition ist mit der von B völlig äquivalent.

II. Berechnung einer arithmetischen Folge aus vorgegebenen Werten

Wird (7) mit (1) kombiniert, so erhält man die Formel zur Aufstellung arithmetischer Differenzfolgen aus aufeinanderfolgenden Werten einer arithmetischen Folge:

$$\begin{aligned} \Delta^{a,\mu} y_k &= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-1} \frac{(-1)^{a-p-i} \delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} \sum_{q=0}^{a-p} (-1)^{a-p-q} \binom{a-p}{q} y_{m+q} \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-1} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} \sum_{q=0}^{a-p} (-1)^{a-p-q} \binom{a-p}{q} y_{m+q} \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \sum_{p=1}^{a-1} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} \left[(-1)^{a-i+0} \binom{a-p}{0} y_{m+0} + \dots + (-1)^{a-i+0+(a-p)} \binom{a-p}{a-p} y_{m+(a-p)} + \dots + (-1)^{a-i+0+p} \binom{a-p}{p} y_{m+p} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \left[\frac{\delta_{(a-i), (a-1)}}{(a-1)!} (-1)^{a-i+0} \binom{a-1}{0} y_{m+0} + \dots + \frac{\delta_{(a-i), (a-1)}}{(a-1)!} (-1)^{a-i+0+(a-1)} \binom{a-1}{a-1} y_{m+(a-1)} + \dots + \frac{\delta_{(a-i), (a-1)}}{(a-1)!} (-1)^{a-i+0+p} \binom{a-1}{p} y_{m+p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta_{(a-2), (a-2)}}{(a-2)!} (-1)^{a-i+0} \binom{a-2}{0} y_{m+0} + \dots + \frac{\delta_{(a-2), (a-2)}}{(a-2)!} (-1)^{a-i+0+(a-2)} \binom{a-2}{a-2} y_{m+(a-2)} + \dots \right] \\ &\quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \quad \equiv \\ &\quad + \frac{\delta_{(a-i), (a-i)}}{(a-i)!} (-1)^{a-i+0} \binom{a-i}{0} y_{m+0} + \dots + \frac{\delta_{(a-i), (a-i)}}{(a-i)!} (-1)^{a-i+0+(a-i)} \binom{a-i}{a-i} y_{m+(a-i)} \Big] \\ &= \sum_{i=0}^{a-1} k^i \left[(-1)^{a-i+0} y_{m+0} \sum_{p=1}^{a-1} \binom{a-p}{0} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} + \dots + (-1)^{a-i+0+(a-i)} y_{m+(a-i)} \sum_{p=1}^{a-1} \binom{a-p}{a-p} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} \right] \end{aligned}$$

$$\Delta^{a,\mu} y_k = \sum_{i=0}^{a-1} k^i \left[\sum_{q=0}^{a-i} (-1)^{a-i+q} y_{m+q} \sum_{p=1}^{a-1} \binom{a-p}{a-q} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} + \sum_{q=0}^{a-i} (-1)^{a-i+q} y_{m+q} \sum_{p=1}^{a-1} \binom{a-p}{a-q} \frac{\delta_{(a-p-i), (a-p)}}{(a-p)!} \right] \quad (x_i = m+i-1)$$

, wobei $0 \leq \mu \leq a$, $a \neq 0$, $\Delta^{a-1} y_m \neq 0$.

Hier ist $\Delta^{a-1} y_m = \sum_{p=0}^{a-1} (-1)^{a+p-1} \binom{a-1}{p} y_{m+p} \neq 0$ die Bedingung dafür, daß der Grad von $\Delta^{a-1} y_m$ genau $(m-1)$ wird.

III. Die Struktur von σ_{hv} für $x_i = i$

Aus der Rekursivdarstellung von σ_{hv} in A₂I.4. folgt unter Berücksichtigung von E.I.:

Satz:

σ_{0v} ($v=1,2,3,\dots$) ist eine arithmetische Folge 0-ten Grades.

$\sigma_{h(v+h-1)}$ ($v=1,2,3,\dots$) ist, wenn $x_i = i$, für natürlichen Rang $2h$ eine arithmetische Folge $2h$ -ten Grades.

Beweis durch vollständige Induktion nach h :

1. Schritt: $h=0$ erfüllt den Satz

L.S. $\sigma_{0v} = 1$

d.h. σ_{0v} ist eine arithmetische Folge 0-ten Grades

R.S. σ_{0v} ist eine arithmetische Folge 0-ten Grades

$h=1$ erfüllt den Satz

L.S. $\sigma_{1v} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v$, wenn $x_i = i$

d.h. σ_{1v} ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge 2-ten Grades

R.S. σ_{1v} ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge 2-ten Grades

2. Schritt: Schluß von h auf $h+1$

Vor.: $\sigma_{h(v+h-1)}$ ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge $2h$ -ten Grades

Beh.: $\sigma_{(h+1)(v+h)}$ ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

Bew.:

L.S. $\Delta \sigma_{(h+1)(v+h)} = (v+h+1) \sigma_{h(v+h)}$ wenn $x_i = i$

d.h. die erste Differenzfolge von $\sigma_{(h+1)(v+h)}$ ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge $(2h+1)$ -ten Grades; also ist wegen Satz I weiter die $[2(h+1)+1]$ -te Differenzfolge von $\sigma_{(h+1)(v+h)}$, wenn $x_i = i$, gleich 0 und die $2(h+1)$ -te Differenzfolge konstant, ungleich Null.

D.h. nach E.I.:

$\sigma_{(h+1)(v+h)}$ ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

R.S. $\sigma_{(h+1)(v+h)}$ ist, wenn $x_i = i$, eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

Dieser Satz ermöglicht einerseits im Zusammenhang mit der in A.I.4. gegebenen Rekursivdarstellung eine sukzessive Erschließung der independenten Formeln für $\sigma_{h(v+h-1)}$, wenn $x_i = i$, (vgl. das Rechenbeispiel zu dem analogen Satz für h_{v+h}^{v+h} in IV.), andererseits die Erschließung der Struktur für eine Formel für die harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \quad | \cdot \frac{\sigma_{mm}}{\sigma_{mm}} \quad (x_i = i)$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{mm}}{k}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^m \frac{\sigma_{mm}}{k}}{\sigma_{mm}}$$

$$= \frac{\sigma_{(m-1)m}}{\sigma_{mm}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \frac{\sigma_{(m-1)m}}{\sigma_{mm}} \quad (x_i = i)}$$

Damit ist die Struktur einer Formel für die harmonische Reihe bestimmt:

$\sigma_{(m-1)m}$ läßt sich durch ein Polynom $2(m-1)$ -ten Grades in m ausdrücken, wenn $x_i = i$:

$$\sigma_{(m-1)m} = \sum_{p=0}^{2(m-1)} A_p m^p \quad \text{wobei } A_p (p=0, 1, \dots, 2(m-1)) \text{ bestimmbar sind (vgl. oben).}$$

$$\sigma_{mm} = m! \quad \text{wenn } x_i = i$$

Demnach sieht die Struktur einer Formel für die harmonische Reihe so aus:

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{k} = \frac{\sum_{p=0}^{2(m-1)} A_p m^p}{m!}$$

IV. Methode zur Berechnung der speziellen Formeln von $h x_v^r$ für $r > v$

Aus der Rekursivdarstellung von $h x_v^r$ in C.I.6.b) folgt unter Berücksichtigung von E.I.:

Satz:

$h x_v^{v+h}$ ($v=1,2,3,\dots$) ist für natürlichen Rang $2h$ eine arithmetische Folge $2h$ -ten Grades.

Beweis durch vollständige Induktion nach h :

1. Schritt: $h=1$ erfüllt den Satz

$$\text{L.S. } h x_v^{v+1} = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} v$$

d.h. $h x_v^{v+1}$ ist eine arithmetische Folge 2-ten Grades

R.S. $h x_v^{v+1}$ ist eine arithmetische Folge 2-ten Grades

2. Schritt: Schluß von h auf $h+1$

Vor.: $h x_v^{v+h}$ ist eine arithmetische Folge $2h$ -ten Grades

Beh.: $h x_v^{v+h+1}$ ist eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

Bew.:

$$\text{L.S. } \Delta h x_v^{v+h+1} = (v+1) h x_{v+1}^{v+h+1}$$

d.h. die erste Differenzfolge von $h x_v^{v+h+1}$ ist eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades;

also ist wegen Satz I. weiter die $[2(h+1)+1]$ -te Differenzfolge von $h x_v^{v+h+1}$ gleich 0 und die $2(h+1)$ -te Differenzfolge konstant, ungleich Null.

d.h. nach E.I.:

$h x_v^{v+h+1}$ ist eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

R.S. $h x_v^{v+h+1}$ ist eine arithmetische Folge $2(h+1)$ -ten Grades

Die Rekursivdarstellung von $h x_v^r$ in C.I.6.b) ermöglicht wegen dem eben bewiesenen Satz mit (17**) eine sukzessive Erschließung der independenten Formeln für $h x_v^{v+h}$ ($h=1,2,3,\dots$).

Es sei ein Rechenbeispiel für $h=2$ gegeben:

$$h x_1^{1+2} = 1$$

$$\Delta h x_v^{v+2} = (v+1) h x_{v+1}^{v+2} \quad (\text{aus der Rekursivdarstellung})$$

Es werden zunächst Werte von $k \log_k^{k+1}$ berechnet

$k \log_k^{k+1}$	1	0	0	0	0	0
$\log_v^v$	1	1	1	1	1	1
$k \log_k^k$	1	2	3	4	5	6
$\log_v^{v+1}$	1	3	6	10	15	21
$k \log_k^{k+1}$	1	6	18	40	75	126

Nun kann $\Delta^{\lambda} \log_1^3$ ($0 \leq \lambda \leq 5$) rasch nach dem Differenzenschema ermittelt werden:

$\Delta^0 \log_1^3$ 1					
$\Delta^1 \log_1^3$ 6	$\Delta^1 \log_2^4$ 18	$\Delta^1 \log_3^5$ 40	$\Delta^1 \log_4^6$ 75	$\Delta^1 \log_5^7$ 126	
$\Delta^2 \log_1^3$ 12	$\Delta^2 \log_2^4$ 22	$\Delta^2 \log_3^5$ 35	$\Delta^2 \log_4^6$ 51		
$\Delta^3 \log_1^3$ 10	$\Delta^3 \log_2^4$ 13	$\Delta^3 \log_3^5$ 16			
$\Delta^4 \log_1^3$ 3	$\Delta^4 \log_2^4$ 3				
$\Delta^5 \log_1^3$ 0					

Diese Werte werden in (7**) für $a=5$, $m=1$ und K/V eingesetzt:

$$\log_v^{v+2} = \sum_{i=0}^4 v^i \sum_{p=1}^{5-i} (-1)^{5-p-i} \binom{5-p-i}{(5-p-i)(5-p)} \frac{\Delta^{5-p} \log_1^3}{(5-p)!} \quad \text{wobei } x_i = i$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^4 x_1^3}{4!} v^4 + [(-1)^1 \sigma_{14} \frac{\Delta^4 x_1^3}{4!} + (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^3 x_1^3}{3!}] v^3 + [(-1)^2 \sigma_{24} \frac{\Delta^4 x_1^3}{4!} + (-1)^1 \sigma_{13} \frac{\Delta^3 x_1^3}{3!} + \\
&+ (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^2 x_1^3}{2!}] v^2 + [(-1)^3 \sigma_{34} \frac{\Delta^4 x_1^3}{4!} + (-1)^2 \sigma_{23} \frac{\Delta^3 x_1^3}{3!} + (-1)^1 \sigma_{12} \frac{\Delta^2 x_1^3}{2!} + (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^1 x_1^3}{1!}] v + \\
&+ [(-1)^4 \sigma_{44} \frac{\Delta^4 x_1^3}{4!} + (-1)^3 \sigma_{33} \frac{\Delta^3 x_1^3}{3!} + (-1)^2 \sigma_{22} \frac{\Delta^2 x_1^3}{2!} + (-1)^1 \sigma_{11} \frac{\Delta^1 x_1^3}{1!} + (-1)^0 \sigma_0 \frac{\Delta^0 x_1^3}{0!}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1 \\
\sigma_{11} &= 1 \\
\sigma_{12} &= 1+2=3 \\
\sigma_{13} &= 1+2+3=6 \\
\sigma_{14} &= 1+2+3+4=10 \\
\sigma_{22} &= 1 \cdot 2 = 2 \\
\sigma_{23} &= 1(2+3) + 2 \cdot 3 = 11 \\
\sigma_{24} &= 1(2+3+4) + 2(3+4) + 3 \cdot 4 = 35 \\
\sigma_{33} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\
\sigma_{34} &= 1 \cdot 2(3+4) + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 50 \\
\sigma_{44} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 \cdot 3}{4!} v^4 + \left(-\frac{10 \cdot 3}{4!} + \frac{1 \cdot 10}{3!} \right) v^3 + \left(\frac{35 \cdot 3}{4!} - \frac{6 \cdot 10}{3!} + \frac{1 \cdot 12}{2!} \right) v^2 + \left(-\frac{50 \cdot 3}{4!} + \frac{11 \cdot 10}{3!} - \frac{3 \cdot 12}{2!} + \frac{1 \cdot 6}{1!} \right) v + \\
&+ \left(\frac{24 \cdot 3}{4!} - \frac{6 \cdot 10}{3!} + \frac{2 \cdot 12}{2!} - \frac{1 \cdot 6}{1!} + \frac{1 \cdot 1}{0!} \right) \\
&= \frac{3v^4 + 10v^3 + 9v^2 + 2v}{4!} \\
&= \binom{v+2}{3} \cdot \frac{3v+1}{4}
\end{aligned}$$

F. Die arithmetische Reihe

I. Rekursivdarstellung zur Aufsummierung der arithmetischen Folge

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \alpha_i k^i$$

$$= \sum_{i=0}^n \alpha_i \sum_{k=1}^m k^i$$

Damit ist die Aufsummierung bei der allgemeinen arithmetischen Folge auf das Problem der Aufsummierung reiner Potenzzahlen transformiert. Für die Aufsummierung reiner Potenzzahlen ist eine Rekursivformel angebar:

Man geht aus von der Binomialformel:

$$(k+1)^{n+1} = \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} k^p \quad (k \wedge p \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

$$(k+1)^{n+1} = \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} k^p + k^{n+1}$$

Diese Gleichung wird für $k=1, \dots, m$ (m natürlich) aufsummiert:

$$\sum_{k=1}^m (k+1)^{n+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} k^p + \sum_{k=1}^m k^{n+1}$$

$$\downarrow k \mapsto k+1$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} k^p + \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} (k+1)^{n+1} + (m+1)^{n+1} = \sum_{k=1}^m \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} k^p + \sum_{k=1}^{m-1} (k+1)^{n+1} + 1$$

$$(m+1)^{n+1} = \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p} \sum_{k=1}^m k^p + \binom{n+1}{n} \sum_{k=1}^m k^n + 1$$

$$(n+1) \sum_{k=1}^m k^n = (m+1)^{n+1} - 1 - \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n+1}{p} \sum_{k=1}^m k^p$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^m k^n = \frac{(m+1)^{n+1} - 1}{n+1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\binom{n+1}{p}}{n+1} \sum_{k=1}^m k^p} \quad (9)$$

II. Independent Darstellung zur Aufsummierung der arithmetischen Folge

Wegen (3) ist die erste Differenzfolge der Teilsummenfolge einer arithmetischen Folge y_k n -ten Grades die Folge y_k . Wegen Satz I ist dann die $(n+2)$ -te Differenzfolge von y_k die konstante Folge 0 und

die $(n+1)$ -te Differenzfolge von $\mathcal{T}_{y,k}$ eine konstante Folge ungleich Null.

Daraus folgt wegen E.I.:

Satz III:

Die Teilsummenfolge $\mathcal{T}_{y,k}$ einer arithmetischen Folge n -ten Grades ist eine arithmetische Folge $(n+1)$ -ten Grades.

1. Hilfssatz zur Aufsummierung der arithmetischen Folge n -ten Grades

$$\sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) = 2^p - 1$$

Beweis durch vollständige Induktion nach p :

1. Schritt: $p=1$ erfüllt den Satz:

$$\text{L.S. } (-1)^2 1! (h_3^3 - h_3^2) = 1$$

$$\text{R.S. } 2^1 - 1 = 1$$

2. Schritt: Schluß von p auf $p+1$

$$\text{Vor.: } \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) = 2^p - 1$$

$$\text{Beh.: } \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+3} - h_{q+2}^{p+2}) = 2^{p+1} - 1$$

Bew.:

$$\text{L.S. } \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+3} - h_{q+2}^{p+2})$$

$$\left[\begin{array}{l} \Delta h_{v-1}^+ = v h_v^+ \\ h_v^{p+1} = h_{v-1}^+ + h_v^+ \end{array} \right]$$

$$= \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+1}^{p+1}) + \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+1} q! (q+2) (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) \quad | \quad q+2 = (q+1) + 1$$

$$= \sum_{q=2}^{p+1} (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+1}^{p+1}) + (h_2^{p+2} - h_2^{p+1}) + \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} (q+1)! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) + \sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1})$$

$$= \sum_{q=1}^p (-1)^q (q+1)! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) + \left(\sum_{u=1}^2 (-1)^{2-u} \frac{u^{p+2}}{u!(2-u)!} - \sum_{u=1}^2 (-1)^{2-u} \frac{u^{p+1}}{u!(2-u)!} \right) - \sum_{q=1}^p (-1)^q (q+1)! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) + 2^p - 1$$

$$= \sum_{u=1}^2 (-1)^u \frac{u^p (u-1)}{(u-1)!(2-u)!} + 2^p - 1$$

$$= -\frac{1^p \cdot 0}{0! 1!} + \frac{2^p \cdot 1}{1! 0!} + 2^p - 1$$

$$= 2^{p+1} - 1$$

$$\text{R.S. } 2^{p+1} - 1$$

q.e.d.

2. Die Aufsummierung der arithmetischen Folge n-ten Grades

Wegen Satz III lässt sich die Reihe $\sigma_m y_k$ (m natürlich) aus (7**) errechnen: Es werden zunächst die λ -ten ($\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Differenzen einer Reihe $\sigma_m y_k$ bestimmt, wobei m frei wählbar ist (hier wird zur Vereinfachung $m=1$ gewählt), dann diese Differenzen in (7**) eingesetzt.

$$[1.] \Delta^0(\sigma_1 y_k)$$

$$\Delta^0(\sigma_1 y_k) = \sigma_1 y_k = y_1 = \sum_{i=0}^n a_i$$

zur Berechnung weiterer Differenzen folgt aus (3):

$$\Delta(\sigma_m y_k) = y_{m+1} = \sum_{i=0}^n a_i (m+1)^i$$

$$[2.] \Delta^1(\sigma_1 y_k)$$

$$\Delta^1(\sigma_1 y_k) = \sum_{i=0}^n a_i 2^i$$

$$[3.][4.] \Delta^\lambda(\sigma_m y_k) \text{ für } \lambda > 1$$

$$\Delta^\lambda(\sigma_m y_k) = \Delta^{\lambda-1}[\Delta(\sigma_m y_k)]$$

$$= \Delta^{\lambda-1} \sum_{i=0}^n a_i (m+1)^i$$

$$= \Delta^{\lambda-1} \sum_{i=0}^n a_i \sum_{q=0}^i \binom{i}{q} m^q$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \Delta^{\lambda-1} \sum_{q=0}^i \binom{i}{q} m^q$$

$$[3.] \Delta^\lambda(\sigma_1 y_k) \text{ für } 1 < \lambda \leq n+1 \text{ (wobei } n \neq 0)$$

Wegen (5*) ergibt sich aus [3.][4.] für $1 < \lambda \leq n+1$:

$$\Delta^\lambda(\sigma_m y_k) = \sum_{i=\lambda-1}^n a_i \Delta^{\lambda-1} \sum_{q=0}^i \binom{i}{q} m^q + \sum_{i=0}^{\lambda-2} a_i \Delta^{\lambda-1} \sum_{q=0}^i \binom{i}{q} m^q$$

$$= \sum_{i=\lambda-1}^n a_i (\lambda-1)! \sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} \sum_{p=\lambda-1}^q \binom{q}{p} \delta_{\lambda-1}^p m^{q-p} + 0$$

$$\begin{aligned}\Delta^\lambda(\delta_\lambda y_k) &= (\lambda-1)! \sum_{i=\lambda-1}^n a_i \sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} \sum_{p=\lambda-1}^q \binom{q}{p} h_{j_{\lambda-1}}^p \\ &= (\lambda-1)! \sum_{i=\lambda-1}^n a_i \sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} h_{j_\lambda}^{q+1}\end{aligned}$$

$$\left[\sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} h_{j_\lambda}^{q+1} \quad (\lambda > 1) \right.$$

$$\left[\begin{aligned} \Delta h_{j_{\lambda-1}}^+ &= v h_{j_\lambda}^+ \\ h_{j_\lambda}^{+1} &= h_{j_{\lambda-1}}^+ + v h_{j_\lambda}^+ \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} h_{j_{\lambda-1}}^q + \lambda \sum_{q=\lambda-1}^i \binom{i}{q} h_{j_\lambda}^q \\ &= h_{j_\lambda}^{i+1} + \lambda \sum_{q=\lambda}^i \binom{i}{q} h_{j_\lambda}^q + \lambda \binom{i}{\lambda-1} h_{j_\lambda}^{\lambda-1} \\ &= h_{j_\lambda}^{i+1} + \lambda h_{j_{\lambda+1}}^{i+1} \\ &= h_{j_{\lambda+1}}^{i+2} - h_{j_{\lambda+1}}^{i+1}\end{aligned}$$

$$= (\lambda-1)! \sum_{i=\lambda-1}^n (h_{j_{\lambda+1}}^{i+2} - h_{j_{\lambda+1}}^{i+1}) a_i$$

[4] $\Delta^\lambda(\delta_\lambda y_k)$ für $\lambda > n+1$

Wegen (5*) ergibt sich aus [3][4] für $\lambda > n+1$:

$$\Delta^\lambda(\delta_m y_k) = 0$$

$$\Delta^\lambda(\delta_\lambda y_k) = 0$$

Man erhält also folgende Formel zur Berechnung von $\Delta^\lambda(\delta_\lambda y_k)$:

$$\Delta^\lambda(\delta_\lambda \sum_{i=0}^n a_i) = \begin{cases} 1. \sum_{i=0}^n a_i & \text{für } \lambda = 0 \\ 2. \sum_{i=0}^n 2^i a_i & \text{für } \lambda = 1 \\ 3. (\lambda-1)! \sum_{i=\lambda-1}^n (h_{j_{\lambda+1}}^{i+2} - h_{j_{\lambda+1}}^{i+1}) a_i & \text{für } 1 < \lambda \leq n+1 \quad (n \neq 0) \\ 4. 0 & \text{für } \lambda > n+1 \end{cases} \quad (10)$$

Setzt man (10) in (7**) ein und ordnet den Ausdruck, so erhält man die Reihe $\delta_m y_k$:

Nun ergibt sich die Reihe $\mathcal{S}_m y_k$ aus folgender Formel:

$$\mathcal{S}_m \sum_{i=0}^n a_i k^i = \sum_{j=2}^{n+1} m^j \sum_{p=i-1}^n a_p \sum_{q=1}^{p+1} (-1)^{q+i} \frac{\mathcal{G}_{(q-1)q}}{q} (h_{q+1}^{p+2} - h_{q+1}^{p+1}) + m \left\{ \sum_{p=1}^n a_p \sum_{q=2}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\mathcal{G}_{(q-1)q}}{q} (h_{q+1}^{p+2} - h_{q+1}^{p+1}) + 2^p \right\} + a_0 \quad (11)$$

($x_i = i$)

III. Aufstellung einer arithmetischen Folge n-ten Grades aus ihrer Teilsummenfolge

Ist eine arithmetische Folge gegeben, so kann aus ihr wegen (3) und (5) eine Folge berechnet werden, deren Teilsummenfolge die gegebene Folge ist.

Die Folge, deren Teilsummenfolge arithmetisch von 0-tem Grad ist, ist, wie man aus (3) und (5) sofort sieht, nicht arithmetisch. Deshalb sei im folgenden der Grad der gegebenen arithmetischen Folge größer als Null.

Es sei nun $\mathcal{S}_m y_k = \sum_{i=0}^n a_i m^i$ ($n > 0$) gegeben und es seien die Folgen gesucht, deren Teilsummenfolgen die gegebene Folge ist.

Aus (3) folgt:

$$y_m = \begin{cases} 1. \mathcal{S}_1 y_k & \text{für } m=1 \\ 2. \Delta(\mathcal{S}_{m-1} y_k) & \text{für } m>1 \end{cases}$$

$$[1.] y_1 = \mathcal{S}_1 y_k = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$[2.] y_m = \Delta(\mathcal{S}_{m-1} y_k)$$

$$= \Delta \sum_{i=0}^n a_i (m-1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \Delta \sum_{p=0}^i (-1)^{i-p} \binom{i}{p} m^p$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{p=0}^{i-1} m^p \sum_{q=1}^{i-p} \binom{i-p}{q} h_1^q (-1)^{i-(q+p)} \binom{i}{q+p}$$

$$\left[\begin{aligned} \binom{q+p}{q} \binom{i}{q+p} &= \frac{(q+p)!}{q! p!} \cdot \frac{i!}{(q+p)! (i-q-p)!} \cdot \frac{(i-p)!}{(i-p)!} \\ &= \frac{i!}{p! (i-p)!} \cdot \frac{(i-p)!}{q! (i-p-q)!} \\ &= \binom{i}{p} \binom{i-p}{q} \end{aligned} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{p=0}^{i-1} \binom{i}{p} m^p \sum_{q=1}^{i-p} \binom{i-p}{q} (-1)^{(i-p)-q} 1^q$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{p=0}^{i-1} (-1)^{i-1-p} \binom{i}{p} m^p \quad (\text{Binomialatz})$$
$$= \sum_{i=1}^n a_i [(-1)^0 \binom{i}{i-1} m^{i-1} + \dots + (-1)^{i-1} \binom{i}{0} m^0]$$
$$= a_n (-1)^0 \binom{n}{n-1} m^{n-1} + \dots + a_n (-1)^{n-1} \binom{n}{0} m^0$$
$$\equiv \equiv$$
$$+ a_1 (-1)^0 \binom{1}{0} m^0$$

$$\begin{aligned}
 &= m^{n-1} \sum_{p=n}^n (-1)^{p-n} \binom{p}{n-1} a_p + \dots + m^0 \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \binom{p}{0} a_p \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} m^i \sum_{p=i+1}^n (-1)^{p-i-1} \binom{p}{i} a_p
 \end{aligned}$$

Setzt man in die nach den a_i geordnete Form von [2.] versuchsweise $m=1$ ein, so ergibt sich:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{p=0}^{i-1} (-1)^{i-1-p} \binom{i-1}{p} 1^p = \sum_{i=1}^n a_i \left[- \sum_{p=0}^{i-1} \binom{i-1}{p} (-1)^{i-1-p} 1^p + 1 \right] = \sum_{i=1}^n a_i = u_1$$

Die gesuchte Folge läßt sich nun so darstellen:

$$\sigma_m y_k = \sum_{i=0}^n a_i m^i \iff y_k = \sum_{i=0}^{n-1} k^i \sum_{p=i-1}^n (-1)^{p-i-1} \binom{p}{i} a_p \quad (n=0) \quad (12)$$

Man kann nun folgenden Satz formulieren:

Satz IV:

Zu einer gegebenen arithmetischen Folge n -ten (n natürlich) Grades gibt es immer eine und nur eine Folge, deren Teilsummenfolge die gegebene Folge ist. Diese Folge ist arithmetisch von $(n-1)$ -tem Grad.

Berechnet wird die Folge aus (12).

G. Die Abgeschlossenheit der arithmetischen Folgen

Aus den Sätzen I, II und III folgt zusammengefasst:

Satz IV („Abgeschlossenheitssatz für arithmetische Folgen“):

Zu einer arithmetischen Folge n -ten ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Grades gibt es immer eine und nur eine Teilsummenfolge und λ -te Differenzfolge.

Die Teilsummenfolge ist wieder arithmetisch und zwar von $(n+1)$ -tem Grad. Berechnet wird die Teilsummenfolge aus (11).

Die λ -te Differenzfolge ist für $0 \leq \lambda \leq n$ wieder arithmetisch und zwar von $(n-\lambda)$ -tem Grad und für $\lambda > n$ die konstante Folge Null. Berechnet wird die λ -te Differenzfolge aus (5).

Zu einer Teilsummenfolge, die arithmetisch von n -tem (n natürlich) Grad ist, gibt es eine und nur eine zugehörige Folge. Diese ist wieder eine arithmetische Folge und zwar von $(n-1)$ -tem Grad. Berechnet wird die zugehörige Folge aus (12).

Zu einer λ -ten ($\lambda \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Differenzfolge, die arithmetisch von n -tem ($n \in \{0, 1, 2, \dots\}$) Grad ist, gibt es immer eine zugehörige Folge und zwar gibt es für $\lambda=0$ nur eine zugehörige Folge, nämlich die 0-te Differenzfolge selbst, und für $\lambda > 0$ gibt es unendlich viele zugehörige Folgen. Die zugehörigen Folgen sind alle wieder arithmetisch und zwar von $(\lambda+n)$ -tem Grad. Für $\lambda > 0$ werden die zugehörigen Folgen aus (7**) im Zusammenhang mit (5) berechnet.

Anhänge zu Kurt Allinger "Jugend forscht / 1971"

Werte von elementarsymmetrischen Funktionen σ_{hp} für $x_i = i$

[illegible]

Werte von vollkombinierten Funktionen $T_{h,v}$ für $k_i = i$

h	v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	$h v^{v+0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	$k h v^{k+0}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$h v^{v+1}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	$k h v^{k+1}$	1	6	18	40	75	126	196	288	405	550
2	$h v^{v+2}$	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705
3	$k h v^{k+2}$	1	14	75	260	700	1596	3234	6000	10395	17050
3	$h v^{v+3}$	1	15	90	350	1050	2646	5880	11880	22275	39325
4	$k h v^{k+3}$	1	30	270	1400	5250	15876	41160	95040	200475	393250
4	$h v^{v+4}$	1	31	301	1701	6951	22827	63987	159027	359502	752752
5	$k h v^{k+4}$	1	62	903	6804	34755	136962	447909	1272216	3235518	7527520
5	$h v^{v+5}$	1	63	966	7770	42525	179487	627396	1899613	5135130	12662650

Beispiele zu den Kombinationsfunktionen

$\mathcal{O}_{34}$

$$\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_4 + \\ + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_4$$

$\mathcal{T}_{34}$

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_1 \mathcal{X}_4 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_4 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_3 + \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_3 \mathcal{X}_4 \mathcal{X}_4 + \\ &+ \mathcal{X}_4 \mathcal{X}_4 \mathcal{X}_4 \end{aligned}$$

Rechenbeispiele zur Differenzenbildung nach (5)

1. Gegeben: $y_k = \sum_{i=0}^n a_i k^i \quad (n \geq 2)$

Gesucht: $\Delta^{n-2} y_k$

$$\begin{aligned} \Delta^{n-2} y_k &= (n-2)! \sum_{i=0}^2 k^i \sum_{p=n-2}^{n-i} \binom{p+i}{p} h_{n-2}^p a_{p+i} \\ &= (n-2)! \left\{ k^2 \left[\binom{n-2+2}{n-2} h_{n-2}^{n-2} a_{n-2+2} \right] + k \left[\binom{n-1+1}{n-1} h_{n-2}^{n-1} a_{n-1+1} + \binom{n-2+1}{n-2} h_{n-2}^{n-2} a_{n-2+1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\binom{n+0}{n} h_{n-2}^n a_{n+0} + \binom{n-1+0}{n-1} h_{n-2}^{n-1} a_{n-1+0} + \binom{n-2+0}{n-2} h_{n-2}^{n-2} a_{n-2+0} \right] \right\} \\ &= (n-2)! \left\{ \binom{n}{2} a_n k^2 + \left[\binom{n}{1} \binom{n-1}{2} a_n + \binom{n-1}{1} a_{n-1} \right] k + \left[\binom{n}{0} \binom{n}{3} \frac{3n-5}{4} a_n + \binom{n-1}{0} \binom{n-1}{2} a_{n-1} + \binom{n-2}{0} a_{n-2} \right] \right\} \\ &= \frac{n!}{2} a_n k^2 + \left(\frac{n(n-2)(n-1)!}{2} a_n + (n-1)(n-2)! a_{n-1} \right) k + \left(\frac{(n-2)(3n-5)n!}{24} a_n + \frac{(n-2)(n-1)!}{2} a_{n-1} + (n-2)! a_{n-2} \right) \end{aligned}$$

2. Gegeben: $y_k = k^4 + 3k^3 - k^2 + 1 \quad (a_4 = 1, a_3 = 3, a_2 = -1, a_1 = 0, a_0 = 1)$

Gesucht: $\Delta^2 y_k$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= 2! \sum_{i=0}^2 k^i \sum_{p=2}^{4-i} \binom{p+i}{p} h_2^p a_{p+i} \\ &= 2 \left\{ k^2 \left[\binom{4}{2} h_2^2 a_4 \right] + k \left[\binom{4}{3} h_2^3 a_4 + \binom{3}{2} h_2^2 a_3 \right] + \left[\binom{4}{4} h_2^4 a_4 + \binom{3}{3} h_2^3 a_3 + \binom{2}{2} h_2^2 a_2 \right] \right\} \\ &= 2 \left\{ k^2 [6 \cdot 1] + k [4 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3] + [1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] \right\} \\ &= 12k^2 + 42k + 30 \end{aligned}$$

Rechenbeispiel zur Differenzenbildung nach (5**)

Gegeben: $y_k = k^4 + 3k^3 - k^2 + 1$ ($a_4 = 1, a_3 = 3, a_2 = -1, a_1 = 0, a_0 = 1$)

Gesucht: $\Delta^2 y_k$

$$\Delta^2 y_k = 2! \sum_{i=2}^4 \frac{h_2^i}{i!} d^i y(k)$$

$$= 2 \left[\frac{h_2^2}{2!} d^2 y(k) + \frac{h_2^3}{3!} d^3 y(k) + \frac{h_2^4}{4!} d^4 y(k) \right]$$

$$\begin{cases} dy(k) = 4k^3 + 9k^2 - 2k \\ d^2 y(k) = 12k^2 + 18k - 2 \\ d^3 y(k) = 24k + 18 \\ d^4 y(k) = 24 \end{cases}$$

$$= 2 \left[6k^2 + 9k - 1 \right. \\ \quad \quad \quad + 12k + 9 \\ \quad \quad \quad \left. + 7 \right]$$

$$= 12k^2 + 42k + 30$$

Rechenbeispiel zur Aufstellung einer arithmetischen Folge aus Differenzen nach (7)

Gegeben : $y_1 = 2$, $y_2 = 9$, $y_3 = 28$, $y_4 = 65$

Gesucht : Δy_k

k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
1	2			
2	9	7	12	
3	28	19	18	6
4	65	37		

$$\Delta y_k = \sum_{i=0}^2 k^i \sum_{p=1}^{3-i} (-1)^{3-p-i} \sigma_{(3-p-i)(3-p)} \frac{\Delta^{4-p} y_1}{(3-p)!} \quad (\alpha_i = i)$$

$$= k^2 \left[(-1)^0 \sigma_{02} \frac{\Delta^3 y_1}{2!} \right] + k \left[(-1)^0 \sigma_{01} \frac{\Delta^2 y_1}{1!} + (-1)^1 \sigma_{12} \frac{\Delta^3 y_1}{2!} \right] + \left[(-1)^0 \sigma_{00} \frac{\Delta y_1}{0!} + (-1)^1 \sigma_{11} \frac{\Delta^2 y_1}{1!} + (-1)^2 \sigma_{22} \frac{\Delta^3 y_1}{2!} \right]$$

$$= k^2 \left[1 \cdot \frac{6}{2} \right] + k \left[1 \cdot \frac{12}{1} - 3 \cdot \frac{6}{2} \right] + \left[1 \cdot \frac{7}{1} - 1 \cdot \frac{12}{1} + 1 \cdot \frac{6}{2} \right]$$

$$= 3k^2 + 3k + 1$$

Rechenbeispiel zur Aufsummierung nach (11)

Gegeben : $y_k = k^3$

Gesucht : $\delta_m y_k$

$$\begin{aligned}
 \delta_m y_k &= \sum_{i=2}^4 m^i \sum_{q=1}^4 (-1)^{q-1} \frac{\sigma_{(q-1)q}}{q} (h_{q+1}^5 - h_{q+1}^4) + m \left[\sum_{q=2}^4 (-1)^{q-1} \frac{\sigma_{(q-1)q}}{q} (h_{q+1}^5 - h_{q+1}^4) + 2^3 \right] \\
 &= m^4 \left[(-1)^0 \frac{\sigma_{04}}{4} (h_5^5 - h_5^4) \right] + m^3 \left[(-1)^1 \frac{\sigma_{14}}{4} (h_5^5 - h_5^4) + (-1)^0 \frac{\sigma_{03}}{3} (h_4^5 - h_4^4) \right] + \\
 &\quad + m^2 \left[(-1)^2 \frac{\sigma_{24}}{4} (h_5^5 - h_5^4) + (-1)^1 \frac{\sigma_{13}}{3} (h_4^5 - h_4^4) + (-1)^0 \frac{\sigma_{02}}{2} (h_3^5 - h_3^4) \right] + \\
 &\quad + m \left[(-1)^3 \frac{\sigma_{34}}{4} (h_5^5 - h_5^4) + (-1)^2 \frac{\sigma_{23}}{3} (h_4^5 - h_4^4) + (-1)^1 \frac{\sigma_{12}}{2} (h_3^5 - h_3^4) + 8 \right] \\
 &= m^4 \left[\frac{1}{4} (1-0) \right] + m^3 \left[-\frac{10}{4} (1-0) + \frac{1}{3} (10-1) \right] + m^2 \left[\frac{35}{4} (1-0) - \frac{6}{3} (10-1) + \frac{1}{2} (25-6) \right] + \\
 &\quad + m \left[-\frac{50}{4} (1-0) + \frac{11}{3} (10-1) - \frac{3}{2} (25-6) + 8 \right] \\
 &= \frac{1}{4} m^4 + \left(-\frac{5}{2} + 3 \right) m^3 + \left(\frac{35}{4} - 18 + \frac{19}{2} \right) m^2 + \left(-\frac{50}{4} + 33 - \frac{57}{2} + 8 \right) m \\
 &= \frac{1}{4} m^4 + \frac{-5+6}{2} m^3 + \frac{35-72+38}{4} m^2 + \frac{-25+66-57+16}{2} m \\
 &= \frac{1}{4} m^4 + \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{4} m^2 \\
 &= \left[\frac{m(m+1)}{2} \right]^2
 \end{aligned}$$

Rechenbeispiel zur Aufstellung einer arithmetischen Folge aus Reihen nach (12)

Gegeben: $\tilde{\sigma}_m y_k = \frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$

Gesucht: y_k

$$y_k = \sum_{i=0}^2 k^i \sum_{p=i,1,1}^3 (-1)^{p-i-1} \binom{p}{i} a_p$$

$$= k^2 \left[(-1)^0 \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \right] + k \left[(-1)^1 \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^0 \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \right] + \left[(-1)^2 \binom{3}{0} \cdot \frac{1}{3} + (-1)^1 \binom{2}{0} \cdot \frac{1}{2} + (-1)^0 \binom{1}{0} \cdot \frac{1}{6} \right]$$

$$= k^2 + (-1+1)k + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right)$$

$$= k^2$$

Arbeitsbeschreibung

I. Wie ich auf den Gedanken kam, die arithmetische Zahlenfolge zu behandeln

Ich eignete mir vor etwa 3 Jahren in selbständiger Arbeit die Grundbegriffe über endliche Folgen an. Da ich in der Lehtbuchliteratur nur wenig über endliche Folgen finden konnte, kam ich auf den Gedanken, mir die wichtigsten Typen der endlichen Folgen in allgemeiner Form systematisch klarzumachen. Zunächst wollte ich die arithmetische Folge n -ten Grades behandeln in dem Glauben, daß diese Folge am leichtesten zu erfassen wäre, weil sie auch in Lehtbüchern als erste behandelt wird. Bald erkannte ich aber, welche umfangreiche Rechen- und Denkarbeit noch nötig war, um diese Folge allgemein zu erfassen. Durch intensive und zielstrebige Arbeit ist es mir nun in den 3 Jahren gelungen ein abgeschlossenes Werk von 45 DIN A4-Seiten über die arithmetische Folge n -ten Grades zu schaffen.

II. Die Grundideen der Arbeit und ihre Verwirklichung

Eine Besonderheit der Arbeit ist, daß in gleich zwei Ideen zugrundeliegen:

1. Idee: Allgemeine und umfassende Behandlung der arithmetischen Folge n -ten Grades
2. Idee: Aufstellung einfacher Rechenschemata für Werte der – im folgenden definierten – Kombinationsfunktionen und Angabe eines Anwendungsbereiches für spezielle Werte der Kombinationsfunktionen

Zur Verwirklichung der 1. Idee:

Der erste Arbeitsschritt war, daß ich möglichst viele Tatsachen, die über die arithmetische Folge n -ten Grades bekannt waren, zusammentrug und soweit möglich verallgemeinerte.

Der zweite Arbeitsschritt bestand darin, die allgemeinen Formeln für die bisher nur in Worten formulierten Erkenntnisse herzustellen und zu beweisen. Dabei verfuhr ich nach folgenden Prinzipien:

- (1) Die Formeln sollten in einer möglichst einfachen und zugleich allgemeinen Form aufgestellt werden,

- damit sie für alle Spezialfälle erhebliche Rechenerleichterungen zulassen (praktischer Wert der Formeln).
- (2) Jedem in den Formeln auftretenden Ausdruck sollte ein besonderer Sinn zugeordnet werden können (theoretischer Wert der Formeln).

Dieser Punkt führt zur Verwirklichung der 2. Idee über:

Zur Verwirklichung der 2. Idee

In den aufgestellten Formeln für die Begehungen der arithmetischen Folgen n -ten Grades hatte ich bereits einen Anwendungsbereich für spezielle Werte der Kombinationsfunktionen vor mir. Aber erst durch unermüdliches und ausdauerndes Probieren und Suchen konnte mir diese Tatsache im zweiten Arbeitsjahr offenbar werden. Durch diese Erkenntnis konnte ich zwei verschiedene Gebiete (Kombinationsfunktionen und Folgen) miteinander verknüpfen.

III. Der Aufbau der Originalarbeit

Der Aufbau der Originalarbeit hat eine didaktisch günstige Darstellungsform zum Ziel. Dieses Ziel wird vor allem mit folgenden Mitteln erreicht:

- Klare Durchgliederung der ganzen Arbeit
 - Angabe von Definitionen und Aufstellung benötigter Sätze über allgemeine Folgen in einem vorausgehenden allgemeinen Teil der Arbeit
 - Herleitung von Sätzen, so daß der Leser an Hand einiger Spezialfälle auf die Methoden allgemeiner Beweise hingeführt wird
 - Vorausnehmen von Hilfssätzen, um einen klaren Aufbau der Hauptbeweise zu ermöglichen
- Dieser Aufbau soll dazu beitragen, daß die Arbeit jedem verständlich gemacht werden kann.

IV. Bemerkungen zur Beweismethodik

Die Beweise werden generell durch vollständige Induktion erbracht. Die Schwierigkeit dieser Induktionsbeweise liegt vor allem darin, daß dauernd eine Reihe von Ungleichungsbedingungen mitberücksichtigt werden muß, da nur mit allgemeinen Größen gerechnet wird.

Zwei häufig verwendete Rechenmethoden seien besonders erwähnt:

- (1) Ändern von Summationsindizes

(2) Aufsummierung von Gleichungen, so daß auf beiden Seiten der Gleichungen etwas wegfällt.
Da die Beweise außerordentlich umfangreich sind (der Beweis des wichtigsten Hilfssatzes umfaßt z.B. 8 DIN A4-Seiten), kann im folgenden nur ein Beweis als Muster angeführt werden. Das übrige Beweiswerk muß der Originalarbeit entnommen werden.

V. Überblick über die Arbeit und ihre wichtigsten Ergebnisse

A. Differenzenbildung und Aufsummierung bei einer allgemeinen Folge

1. Differenzfolgen- und Differenzendefinitionen und Summenfolgen- und Reihendefinitionen

Die folgenden Definitionen dienen dazu, in der ganzen Arbeit eine klare Begriffsbildung zu gewährleisten.

Definition der λ -ten Differenzfolge:

Ist y_k ($k=1,2,3,\dots$) irgendeine Folge, so ist die λ -te ($\lambda \in \{0,1,2,\dots\}$) Differenzfolge $\Delta^\lambda y_k$

erklärt durch:

$$\Delta^0 y_k := y_k$$

$$\Delta^1 y_k := \Delta y_k := y_{k+1} - y_k$$

$$\Delta^m y_k := \Delta(\Delta^m y_k) \text{ wobei } m \in \{1,2,\dots,\lambda-1\}$$

Definition der λ -ten Differenz eines Folgengliedes:

Ist y_k ($k=1,2,3,\dots$) irgendeine Folge und i ein spezieller k -Wert, so heißt

das Folgenglied $\Delta^\lambda y_i$ der Folge $\Delta^\lambda y_k$ ($\lambda \in \{0,1,2,\dots\}$)

die λ -te Differenz des Folgengliedes y_i der Folge y_k .

Definition der Teilsummenfolge:

Ist y_k ($k=1,2,3,\dots$) irgendeine Folge, so ist die Teilsummenfolge σy_k erklärt durch:

$$\sigma y_k := \sum_{n=1}^k y_n \text{ wobei } k=1,2,3,\dots$$

Definition der Reihe:

Ist y_k ($k=1,2,3,\dots$) irgendeine Folge und m ein spezieller k -Wert, so heißt das Folgenglied

$$\sigma_m y_k := \sum_{n=1}^m y_n \text{ der Folge } \sigma y_k$$

die Reihe mit m Gliedern der Folge y_k

2. Aufstellung der λ -ten Differenzfolge als der $(\lambda+1)$ -ten

$$\Delta^{\lambda} y_{\nu} = \Delta^{\lambda} y_m + \sum_{k=1}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k - \sum_{k=1}^{m-1} \Delta^{\lambda+1} y_k \quad \text{für } \nu \text{ und } m \text{ beliebig natürlich}$$

3. Aufstellung einer allgemeinen Folge aus ihrer Teilsummenfolge

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_1 y_k \\ y_m &= \Delta(\delta_{m-1} y_k) \quad \text{wobei } m \in \{2, 3, 4, \dots\} \quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

A₂ Die Kombinationsfunktionen

1. Definitionen

Definition der elementarsymmetrischen Funktionen:

Sind x_i ($1 \leq i$; i und v natürlich) v reelle Variable, so versteht man unter den v elementarsymmetrischen Funktionen σ_{hv} (h natürlich $\leq v$) der x_i die Summen derjenigen $\binom{v}{h}$ Produkte mit h Faktoren x_i , die die $\binom{v}{h}$ Faktorkombinationen ohne Wiederholung von den v Faktoren x_i zur h -ten Klasse darstellen. Außerdem sei für $h=0$ $\sigma_{0v} := \sigma_0 := 1$ festgelegt.

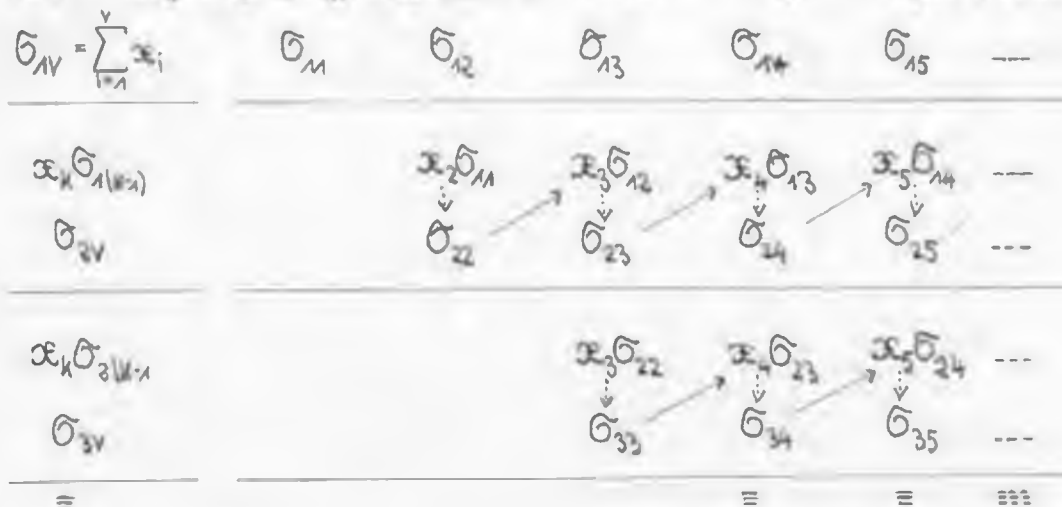
Definition der vollkombinierten Funktionen:

Sind x_i ($1 \leq i$; i und v natürlich) v reelle Variable, so versteht man unter den v vollkombinierten Funktionen τ_{hv} (h natürlich) der x_i die Summe derjenigen $\binom{v+h-1}{h}$ Produkte mit h Faktoren x_i , die die $\binom{v+h-1}{h}$ Faktorkombinationen mit Wiederholung von den v Faktoren x_i zur h -ten Klasse darstellen. Außerdem sei für $h=0$ $\tau_{0v} := \tau_0 := 1$ festgelegt.

2. Berechnungsschemata

a) Berechnungsschema für die elementarsymmetrischen Funktionen

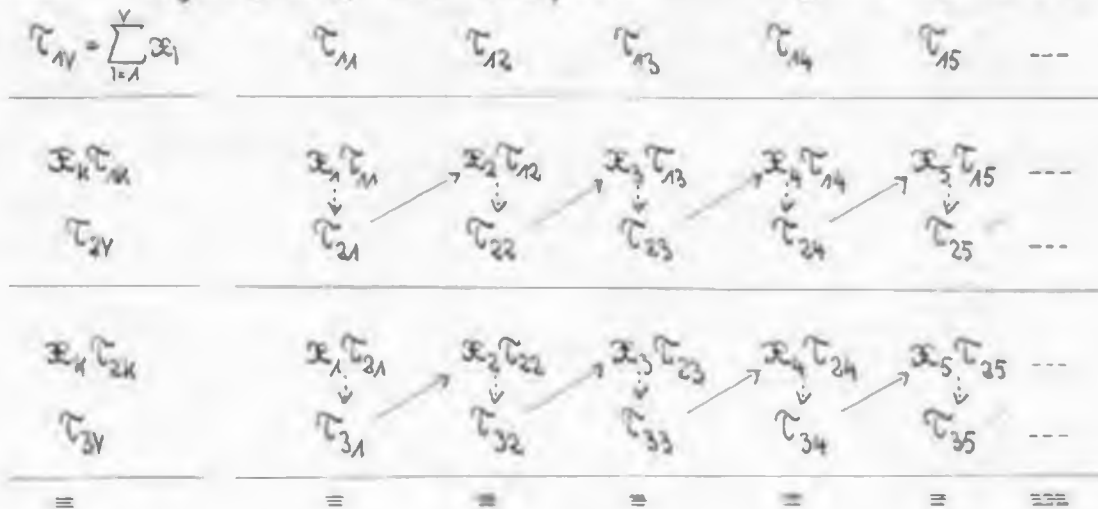
Aus der Beziehung $\Delta \sigma_{hv} = x_{h+1} \sigma_{h-1, v}$ (h konstant > 1) folgt ein einfaches Schema zur Berechnung von σ_{hv} :



Es wird in Richtung der punktierten Pfeile angeschrieben und in Richtung der ausgezogenen Pfeile addiert

b) Berechnungsschema für die vollkombinierten Funktionen

Aus der Beziehung $\Delta T_{hv} = x_{v-1} T_{(h-1)(v-1)}$ (h konstant > 1) folgt ein einfaches Schema zur Berechnung von T_{hv} :



Es wird in Richtung der punktierten Pfeile angeschrieben und in Richtung der ausgehenden Pfeile addiert

B. Zusammenstellung der verwendeten Hilfssätze

$$h_{hv}^+ := \sum_{u=1}^v (-1)^{v-u} \frac{u^r}{u!(v-u)!} \quad \left\{ \begin{array}{l} = \frac{(-1)^{v+1}}{v!} \quad \text{für } r=0 \\ = 1 \quad \text{wenn } v=1 \\ = 0 \quad \text{wenn } v>1 \end{array} \right. \quad \text{für } 1 \leq r < v$$

$$= T_{(v-r)v} \quad \text{wobei } x_i = i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} = 1 \quad \text{für } r=v \\ = \binom{v+1}{2} \quad \text{für } r=v+1 \\ = \binom{v+2}{3} \frac{3v+1}{4} \quad \text{für } r=v+2 \\ = \binom{v+3}{4} \binom{v+1}{2} \quad \text{für } r=v+3 \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \right. \quad \text{für } r \geq v$$

$$\sum_{r=v}^i \binom{i}{r} h_{rv}^+ = h_{v+1}^{i+1} \quad \text{wobei } i \in \{v, v+1, v+2, \dots\}$$

$$\sum_{q=1}^p (-1)^{q+1} q! (h_{q+2}^{p+2} - h_{q+2}^{p+1}) = 2^p - 1$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n+i)!}{(n-1)!(i+1)} \quad (n \text{ natürlich})$$

Zu der Beziehung $h_{hv}^+ = 0$ ($v > 1$ und $1 \leq r < v$) sei der Beweis als Musterbeweis angegeben, da diese

Beziehung eine Schlüsselstellung für die ganze Arbeit einnimmt. Sie ermöglicht es nämlich, daß in der Formel für die n -ten Differenzfolgen der arithmetischen Folge alles weggelassen ist, was den Wert Null annimmt.

Beweis, daß $h_{\gamma}^T = 0$ für $\gamma > 1$ und $1 \leq T \leq \gamma$, durch vollständige Induktion nach γ :

1. Schritt: $\gamma = 2$ erfüllt den Satz

$$1 \leq T \leq 2 \Leftrightarrow T = 1$$

$$\text{L.S. } h_{\gamma}^T = h_{\gamma}^1 = (-1)^1 \frac{1}{1!1!} + (-1)^0 \frac{2}{2!0!} = -1 + 1 = 0$$

$$\text{R.S. } 0$$

2. Schritt: Schluß von γ auf $\gamma+1$

Vor.: $h_{\gamma}^S = 0$ für $1 \leq S \leq \gamma-1$ und $\gamma \geq 2$; weiter sei $h_{\gamma}^0 = \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma!}$ als schon bewiesen annehmen

Beh.: $h_{\gamma+1}^T = 0$ für $1 \leq T \leq \gamma$ und $\gamma \geq 2$

Beh.:

$$\text{L.S. } h_{\gamma}^S - h_{\gamma-1}^{S-1} = \sum_{u=1}^{\gamma} (-1)^{\gamma-u} \frac{u^S}{u!(\gamma-u)!} - \sum_{u=1}^{\gamma-1} (-1)^{\gamma-1-u} \frac{u^{S-1}}{u!(\gamma-1-u)!} \quad (\gamma \geq 2 \text{ natürlich, } S \text{ natürlich})$$

$$= \sum_{u=1}^{\gamma-1} (-1)^{\gamma-u} \frac{u^S + \gamma u^{S-1} - u^S}{u!(\gamma-u)!} + \frac{\gamma^S}{\gamma!}$$

$$= \gamma h_{\gamma}^{S-1}$$

$$| \cdot \gamma^{T-S} \text{ wobei } T \text{ natürlich sei}$$

$$\gamma^{T-S} h_{\gamma}^S - \gamma^{T-S} h_{\gamma-1}^{S-1} = \gamma^{T-S+1} h_{\gamma}^{S-1}$$

$$\sum_{s=1}^T \gamma^{T-S} h_{\gamma}^S - \sum_{s=1}^T \gamma^{T-S} h_{\gamma-1}^{S-1} = \sum_{s=1}^T \gamma^{T-S+1} h_{\gamma}^{S-1}$$

$$\sum_{s=1}^{T-1} \gamma^{T-S} h_{\gamma}^S + h_{\gamma}^T - \sum_{s=2}^T \gamma^{T-S} h_{\gamma-1}^{S-1} - \gamma^{T-1} h_{\gamma-1}^0 = \sum_{s=2}^T \gamma^{T-S+1} h_{\gamma}^{S-1} + \gamma^T h_{\gamma}^0 \quad | \quad h_{\gamma}^0 = \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma!} \quad (\text{Hilfssatz!})$$

$$\sum_{s=1}^{T-1} \gamma^{T-S} h_{\gamma}^S + h_{\gamma}^T - \sum_{s=2}^T \gamma^{T-S} h_{\gamma-1}^{S-1} - \gamma^{T-1} \frac{(-1)^{\gamma}}{(\gamma-1)!} = \sum_{s=2}^{T-1} \gamma^{T-S+1} h_{\gamma}^{S-1} + \gamma^T \frac{(-1)^{\gamma+1}}{\gamma!}$$

$$h_{\gamma}^T = \sum_{s=2}^T \gamma^{T-S} h_{\gamma-1}^{S-1} \quad (\gamma \geq 2)$$

Ersetzt man noch $s \leq s+1$, so ergibt sich für $h_{\gamma+1}^T$:

$$h_{\gamma+1}^T = \sum_{s=1}^{T-1} (\gamma+1)^{T-S-1} h_{\gamma}^S \quad (\gamma \geq 1)$$

Wählt man hier $1 \leq T \leq \gamma$, so ist $1 \leq S \leq T-1 \leq \gamma-1$, und es folgt wegen Voraussetzung für $\gamma \geq 2$:

$$h_{\gamma+1}^T = \sum_{s=1}^{T-1} (\gamma+1)^{T-S-1} \cdot 0 \quad \text{für } \gamma \geq 2 \text{ und } 1 \leq T \leq \gamma$$

$$= 0$$

$$\text{R.S. } 0 \quad \text{für } 1 \leq T \leq \gamma \text{ und } \gamma \geq 2$$

q.e.d.

C. Definition der arithmetischen Folge n-ten Grades

Definition:

Eine Folge $y_k (k=1,2,3,\dots)$ heißt eine arithmetische Folge n-ten Grades ($n \in \{0,1,2,\dots\}$), wenn

$$y_k = \sum_{i=0}^n a_i k^i \quad \text{wobei } a_i (i=0,1,\dots,n) \text{ konstante Größen sind und } a_n \neq 0.$$

D. Formel für die λ -te Differenzfolge einer arithmetischen Folge n-ten Grades

$$\Delta^\lambda \sum_{i=0}^n a_i k^i = \begin{cases} 1. \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=0}^{n-\lambda} k^i \sum_{p=\lambda}^{n-i} \binom{p+i}{p} \Delta_\lambda^p a_{p+i} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \text{ (n+0)} \\ 3. 0 & \text{für } \lambda > n \end{cases}$$

Der Beweis dieser Formel ist zwar außerordentlich kompliziert, aber die Formel selbst ist von so großer Bedeutung, daß sich der Aufwand voll lohnt:

- Die Formel bietet eine größtmögliche Rechenvereinfachung in Spezialfällen, da keine Glieder mehr enthalten sind, die zu Null würden im allgemeinen Fall.
- Der Formelausdruck ist vollkommen geordnet
- Die Formel bietet einen Anwendungsbereich für spezielle Werte der vollkombinierten Funktionen
- Aus der Formel läßt sich sofort folgender Satz ableiten:

Die λ -te ($\lambda \in \{0,1,2,\dots\}$) Differenzfolge einer arithmetischen Folge n-ten ($n \in \{0,1,2,\dots\}$) Grades ist für $\lambda \leq n$ wieder eine arithmetische Folge und zwar genau $(n-\lambda)$ -ten Grades und für $\lambda > n$ die konstante Folge 0.

- Der Zusammenhang zwischen λ -ter Differenzfolge einer arithmetischen Folge n-ten Grades und der Ableitung einer ganzen rationalen Funktion ist leicht herzustellen:

$$\Delta^\lambda y_k = \begin{cases} 1. y_k & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=\lambda}^n \frac{y^{(i)}(k)}{i!} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \text{ (n+0)} \\ 3. y^{(n)}(k) & \text{für } \lambda > n \end{cases}$$

, wobei y ganz rational und k natürlich ist.

- Die Formel ist die Voraussetzung zur genauen formelmäßigen Erfassung der arithmetischen Reihe

E. Formel zur Aufstellung einer arithmetischen Folge aus Differenzfolgen

Ausgehend von der Aufgabe, eine Folge $y_k (k=1,2,3,\dots)$ anzugeben, bei der $\Delta^a y_k = 0$ für alle k , wird die Newtonsche Interpolationsformel in ihrer für arithmetische Folgen spezialisierten Form einleuchtend hergeleitet und dann bewiesen. Man erhält folgenden Ausdruck:

$$y_k = \sum_{i=0}^{a-1} k \cdot \sum_{p=1}^{a-1} (-1)^{a-p-i} \sigma_{k-p-i}(a-p) \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(a-p)!} \quad (x_1 = m+i-1)$$

, wobei $a > 0$ und $\Delta^{a-1} y_m \neq 0$

Die Bedeutung der Formel an sich vor der allgemeinen Newtonschen Interpolationsformel:

- Der Formelausdruck ist vollkommen geordnet
- Die Formel bietet einen Anwendungsbereich für spezielle Werte der elementarsymmetrischen Funktionen
- Aus der Formel läßt sich sofort folgender Satz ableiten:

Ist die $(a-1)$ -te (a natürlich) Differenzfolge einer Folge y_k die konstante Folge 0 und ist irgendeine $(a-1)$ -te Differenz dieser Folge y_k ungleich Null, so ist y_k eine arithmetische Folge genau $(a-1)$ -ten Grades.

F. Neue Definition der arithmetischen Folge n-ten Grades

Die in D. und E. angegebenen Sätze erlauben eine neue, sehr wichtige Definition für die arithmetische Folge n-ten Grades.

Definition:

Eine Folge $y_k (k=1,2,3,\dots)$ heißt arithmetische Folge n-ten ($n \in \{0,1,2,\dots\}$) Grades, wenn

$$\Delta^{n+1} y_k = 0 \quad \text{für alle } k$$

$$\text{und } \Delta^n y_k \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } k.$$

Mit Hilfe dieser Definition kann bei implizit gegebenen arithmetischen Folgen oft leichter gezeigt werden, daß die Folgen arithmetisch sind, als mit der ursprünglichen Definition von C.

G. Die arithmetische Reihe

a) Rekursivdarstellung zur Aufsummierung der arithmetischen Folge

Hier habe ich die meist verwendete Methode zur Aufsummierung der Potenzreihen verallgemeinert:

$$\sum_{K=1}^m \sum_{i=0}^n q_i k^i = \sum_{i=0}^n q_i \sum_{K=1}^m k^i$$

$$\sum_{K=1}^m k^i = \frac{(m+1)^{i+1} - 1}{i+1} - \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(i-p)}{i+1} \sum_{K=1}^m k^p$$

$$\sum_{k=1}^m k^i = \frac{(m+1)^{i+1} - 1}{i+1} - \sum_{p=0}^{i-1} \frac{(i-p)}{i+1} \sum_{k=1}^m k^p$$

b) Independente Darstellung zur Aufsummierung der arithmetischen Folge

Diese nun folgende Formel stellt die Krönung der Arbeit dar. Hier zeigt sich die Leistungsfähigkeit der in D. und E. aufgestellten Formeln in vollem Umfang.

$$\delta_m \sum_{i=0}^n q_i w_i = \sum_{i=0}^{m-1} m_i \sum_{p=i+1}^n q_p \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{q-i} \frac{\delta_{m-i}}{q} (f_{q+1}^{p+2} - f_{q+1}^{p+1}) + m \left\{ \sum_{p=1}^n q_p \sum_{q=2}^{p+1} (-1)^{q-1} \frac{\delta_{m-1}}{q} (f_{q+1}^{p+2} - f_{q+1}^{p+1}) \cdot 2^p + a_0 \right\}$$

(x_i = i)

Mit dieser Formel ist es zum ersten Mal gelungen, die arithmetische Reihe explizit anzugeben und noch dazu in geordneter Form. Diese Formel bringt auch wesentliche Rechenerleichterungen für Spezialfälle.

H. Die Aufstellung einer arithmetischen Folge aus ihrer Teilsummenfolge

Auch hier hilft uns die Formel von D wieder, die gesuchte Formel aufzustellen:

$$x_{m \pm k} = \sum_{l=0}^n a_l m^l \iff y_k = \sum_{i=0}^{n-1} K^i \sum_{p \in \mathbb{N}} (-1)^{p-i-1} \binom{p}{i} a_p \quad (n \neq 0)$$

Durch diese Beziehung lässt sich bei gegebener arithmetischer Teilsummenfolge sehr leicht die zugehörige Folge berechnen.

2 Die Abgeschlossenheit der arithmetischen Folgen

Unter der Bezeichnung „Abgeschlossenheitssatz für arithmetische Folgen“ werden in der Originalarbeit die wichtigsten Ergebnisse in Worten übersichtlich zusammengefaßt.

Die Bezeichnung „Abgeschlossenheit“ soll darauf hinweisen, daß bei Differenzbildung und Summenbildung bei arithmetischen Folgen nur wieder arithmetische Folgen entstehen oder die konstante Folge Null.

≡ Anmerkungen zu Schreibweisen:

$a|b$ bedeutet: „a wird ersetzt durch b“

$$\sum_{a=0}^{q-1} 1 := 0 \quad \sum_{a=0}^{q-1} a := 1 \quad (a \in \{0, 1, 2, \dots, 1\}) \quad (\text{vgl. „van der Waerden Algebra I“})$$

Folgen werden durch ein allgemeines Glied dargestellt.

VII. Literaturnachweis

van der Waerden : Algebra I Springer-Verlag 1960

Zwenger-Klug : Algebra J. Lindauer Verlag München 1964

Kurt Allinger

München, den 8. Jan. 1971

8 München 13

Schleißheimer Str. 311a

Beschreibung der mathematischen Arbeit für den Wettbewerb „Jugend forscht“

Ich habe meiner Arbeit den Titel „Die arithmetische Zahlenfolge“ gegeben. Die Arbeit verfolgt, wie der allgemeine Titel schon ankündigt, eine allgemeine Behandlung der arithmetischen Folge n -ten Grades. In der Arbeit werden schon bekannte Dinge geordnet und teils verallgemeinert zusammengetragen und durch neue Formeln ergänzt. Dadurch erhält man eine Übersicht über die arithmetischen Folgen. Soweit ich literaturkundig bin, ist dies der erste Versuch, die arithmetische Folge allgemein und umfassend zu behandeln. Die Beweise der Formeln habe ich fast ausschließlich durch vollständige Induktion erbracht. Diese teils sehr komplizierten Induktionsbeweise sind alle mein geistiges Eigentum. Für Herleitungen und Beweise der Formeln wurden in keinem Fall Anregungen aus der Fachliteratur verwendet.

Ich will nun die einzelnen Abschnitte der Arbeit und ihre Bedeutung kurz erläutern. Eine Angabe der Herleitungen und Beweise der Formeln ist in diesem Rahmen allerdings nicht möglich.

Die arithmetische Zahlenfolge

A. Differenzenbildung und Aufsummierung bei einer allgemeinen Folge

Dieser Abschnitt geht von irgendeiner Folge aus. Es werden Definitionen für Differenzfolgen einer Folge und für Reinen gegeben und eine Formel aufgestellt zur Aufstellung der n -ten Differenzfolge aus der $(n+1)$ -ten. Dieser 4-DinA4-Seiten umfassende Abschnitt bringt zwar Bekanntes, ist aber zur präzisen Fassung von Begriffen unbedingt nötig, da wage Begriffsbestimmungen, wie sie oft in der Fachliteratur vorkommen, nicht ausreichen.

B. Definition der arithmetischen Folge n -ten Grades

C. Die n -te Differenz der arithmetischen Folge n -ten Grades

Die Aufstellung der Formel für die n -te Differenz der arithmetischen Folge stellt die grundlegende Neuigkeit der Arbeit dar. Bei dem Versuch, die Formel zu beweisen, stieß ich auf den nun folgenden Hilfssatz, dessen Beweis 5 DinA4-Seiten umfasst. Günstigste Form und Beweis der Hilfssatzbeziehung sind nur mein Werk.

I. Hilfssatz

Für $h_V^r = \sum_{u=1}^V (-1)^{V-u} \frac{u^r}{u!(V-u)!}$ ($V=1,2,3,\dots; r \in \{0,1,2,\dots\}$), wobei h_V^r ein abkürzendes Symbol ist,

gilt:

$$h_V^r = \begin{cases} = \frac{(-1)^{V+1}}{V!} & \text{für } r=0 \\ = 1 & \text{für } r=1 \\ = 0 & \text{für } r>1 \end{cases} \quad \text{für } 1 \leq r < V$$

$$h_V^r = \begin{cases} = 1 & \text{für } r=V \\ = \binom{V+1}{2} & \text{für } r=V+1 \\ = \binom{V+2}{3} \binom{3V+1}{4} & \text{für } r=V+2 \\ = \binom{V+3}{4} \binom{V+1}{2} & \text{für } r=V+3 \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad \text{für } r \geq V$$

$$h_V^r = \sum_{k=1}^V k h_k^{r+V-1}$$

Hierbei ist $h_V^r = h_V^{r+1}$ (h natürlich) eine arithmetische Folge 2h-ten Grades.

$$\sum_{r=V}^i \binom{i}{r} h_V^r = h_{V+1}^{i+1} \quad \text{wobei } i \in \{V, V+1, V+2, \dots\}$$

Werte von h_V^r ($r \geq V$) werden dann so berechnet:

$$\begin{array}{cccc} h_V^V & 1 & 1 & 1 \dots \\ V h_V^V & 1 & 2 & 3 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \\ h_V^{V+1} & 1 & 3 & 6 \dots \\ & & \text{u.s.w.} & \end{array}$$

II. Formel für die λ -te Differenzfolge einer arithmetischen Folge

$$\Delta^\lambda \left(\sum_{i=0}^n a_i k^i \right) = \begin{cases} 1. \sum_{i=0}^n a_i k^i & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=0}^{n-\lambda} k^i \sum_{p=\lambda}^{n-i} \binom{p-i}{\lambda} h_\lambda^p a_{p-i} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \\ 3. 0 & \text{für } \lambda > n \end{cases}$$

($a_n \neq 0$)

Dies ist die kürzeste und vielsagendste Formel für die λ -te Differenzfolge einer arithmetischen Folge.

III. Zusammenhang zwischen λ -ter Differenzfolge und λ -ter Ableitung bei ganzen Funktionen

Wird $\sum_{i=0}^n a_i k^i$ ($a_n \neq 0$) gleich y_k gesetzt, so gilt für k natürlich:

$$\Delta^\lambda y_k = \begin{cases} 1. y_k & \text{für } \lambda=0 \\ 2. \lambda! \sum_{i=\lambda}^n \frac{h_{\lambda}^i}{i!} y_k^{(i)} & \text{für } 0 < \lambda \leq n \\ 3. y^{(\lambda)} & \text{für } \lambda > n \end{cases}$$

Diese Beziehung wird aus II. erschlossen. Das zeigt deutlich die Leistungsfähigkeit der Formel von II.

D. Die Aufstellung einer arithmetischen Folge n -ten Grades aus Differenzfolgen

In diesem Abschnitt wird der Versuch unternommen, die Newtonsche Interpolationsformel verständlich herzuleiten und nicht einem an den Kopf zu werfen, wie es in der Fachliteratur üblich zu sein scheint.

I. Hilfssatz

Als Hilfssatz wird die Aufsummierung der Folge $\frac{(i+k-1)!}{(k-1)!}$ ($k=1,2,3,\dots; i \in \{0,1,2,\dots\}$) benötigt. Für spezielle i -Werte wird die durch vollständige Induktion zu beweisende Formel schon in der Schule verwendet.

$$\sum_{k=1}^n \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(n+i)!}{(n-1)! (i+1)!} \quad (n \text{ natürlich})$$

II. Die Aufstellung einer arithmetischen Folge n -ten Grades aus Differenzfolgen

Ich gehe aus von der Aufgabe, eine Folge y_k ($k=1,2,3,\dots$) anzugeben, bei der $\Delta^a y_k = 0$ für alle k und erhalte die Newtonsche Interpolationsformel in der nach Potenzen von k geordneten Form:

$$\Delta^a y_k = \sum_{i=0}^{n-1} k^i \sum_{p=1}^{n-i} (-1)^{n-p-i} \sigma_{(n-p-i)(n-p)} \frac{\Delta^{a-p} y_m}{(n-p)!} \quad (0 \leq \mu \leq a, a \neq 0, \Delta^{a-1} y_m \neq 0)$$

Hierbei stellen die $\sigma_{(n-p-i)(n-p)}$ die Elementarsymmetrischen Funktionen dar, wie sie in „van der Waerden, Algebra I“ angegeben sind:

$$\sigma_0 = 1$$

$$\sigma_{(k)(n)} = \sum_{i_1=1}^{n-k+1} \sum_{i_2=1}^{n-k+2} \dots \sum_{i_k=1}^n x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad \text{für } k \geq 1, \text{ wobei oben } x_i = m+i-1$$

E. Anwendungen zu D

I. Andere Definition der arithmetischen Folge n -ten Grades über die n -te und $(n+1)$ -te Differenzfolge

Diese Definition wird ermöglicht durch eine Verknüpfung von D mit CII.

I. Berechnung einer arithmetischen Folge aus vorgegebenen Werten

Dieses Problem lässt sich ebenfalls aus D lösen durch Verknüpfung mit der in A. bewiesenen

$$\text{Formel } \Delta^n y_k = \sum_{p=0}^n (-1)^{n-p} \binom{n}{p} y_{k+p} \quad (k=1,2,3,\dots; n \in \{0,1,2,\dots\}).$$

III. Allgemeine Methode zur Berechnung der speziellen Formeln von $h_{\nu}^{\dagger}$ für $r > \nu$

Dies ist hier die interessanteste Anwendung von D: Es wird der Beweis erbracht, daß $h_{\nu}^{\dagger}$ für $r > \nu$ arithmetisch ist, womit zugleich die Berechnungsmethode für die speziellen Formeln gegeben ist.

F. Die Aufsummierung der arithmetischen Folge

I. Rekursivformel

Hier ist eine in „Zwerverger-Krug Algebra“ im Verlag LMU angegebene Methode verallgemeinert:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n a_i k^i &= \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=1}^m k^i \\ \sum_{k=1}^m k^n &= \frac{(m+1)^{n+1} - 1}{n+1} - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\binom{n}{p}}{n+1} \sum_{k=1}^m k^p \end{aligned}$$

Hergeleitet wird die letzte Beziehung aus dem Binomischen Lehrsatz.

II. Independent Darstellung

Dieser Abschnitt ist sozusagen die Krönung der Arbeit. Ist auch die Idee selbst, Summenformeln aus ihren Differenzfolgen aufzustellen, nicht neu (vgl. „van der Waerden Algebra I“), so wird doch die Leistungsfähigkeit der Formel von C.II. erneut deutlich und diese Formel mit der Newtonschen Interpolationsformel in Verbindung gebracht.

III. Aufstellung einer arithmetischen Folge aus ihrer Teilsummenfolge

G. Die Abgeschlossenheit der arithmetischen Folgen bezüglich Differenz- und Teilsummenfolgen

Mit dieser Arbeit sollen die arithmetischen Folgen einmal umfassend und allgemein behandelt sein. Das hat die Angabe der Gliederung der Arbeit wohl gezeigt.

Zurück klingeln